



Veðurstofa Íslands Greinargerð

Jón Elvar Wallevik

Hafíslíkanið MCRIM 2.5 fyrir íslensk hafsvæði

**VÍ-G99017-ÚR09
Reykjavík
September 1999**

Veðurstofa Íslands Greinargerð

Jón Elvar Wallevik

Hafíslíkanið MCRIM 2.5 fyrir íslensk hafsvæði

**VÍ-G99017-ÚR09
Reykjavík
September 1999**

FORMÁLI

Seinni hluta ársins 1995 fékk svið hafísrannsókna á Veðurstofu Íslands í hendur hafíslíkan sem er nefnt *Multi Category Regional Ice Model, version 2.5* (MCRIM 2.5). Var það fengið með milligöngu dr. Þórs Jakobssonar yfirmanns hafísrannsókna Veðurstofu Íslands, frá starfsmanni AES (Atmospheric Environment Service) í Kanada, dr. V. R. Neralla.

Tilkoma þessa hafíslíkans varð hvatinn að meistaraþrófsverkefni höfundar. Höfundur fór fyrst út til Noregs í nám við Óslóarháskóla sem NORDPLUS nemandi Háskóla Íslands og var þar allt árið 1996. Tók hann námskeið í haffræði, veðurfræði og fræði samfelldra efna. Sjálft verkefnið hófst ekki fyrr en í febrúar 1997. Þetta er 30 eininga verkefni á vegum eðlisfræðiskorar Háskóla Íslands og Veðurstofu Íslands.

Hafísinn er mjög svo áhugavert fyrirbæri og er endalaust hægt að skrifa um hann. En stærð og umfang þessa verkefnis takmarkast við stærð og umfang 30 eininga verkefnis. Sumum kann þess vegna að þykja ýmislegt vanta í þetta rit og hafa eflaust hugmyndir um margt sem bæta má við.

Þetta verkefni er unnið undir umsjón aðalleiðbeinenda míns Þórs Jakobssonar og meðleiðbeinenda minna Svens Þ. Sigurðssonar dósents og Þorbjörns Karlssonar prófessors.

Meistaraverkefni þetta hefur m.a. notið stuðnings tveggja alþjóðlegra verkefna sem Veðurstofa Íslands tekur þátt í:

1. Climate and Sea Ice Variability in the North Atlantic (Nordisk Miljöforskningsprogram - Klima).
2. European Subpolar Ocean Programme - Phase 2 (ESOP2); MAS2-CT95-0015.

Desember 1997
Jón Elvar Wallevik

Undirritaður lauk meistaránámi sínu við eðlisfræðiskor Háskóla Íslands í ársbyrjun 1998. Prófrítgerðin var á þeim tíma einungis fjölfölduð í fáeinum eintökum. Útgáfustjórn Veðurstofu Íslands hefur nú góðfúslega samþykkt útgáfu ritgerðarinnar. Vona ég að þessi útgáfa, endurbætt á stöku stað, gagnist fleirum fyrir bragðið.

Ágúst 1999
Jón Elvar Wallevik

EFNISYFIRLIT

INNGANGUR.....	4
1. LÍKANID MCRIM 2.5	8
1.1 MASSAVARÐVEISLUJAFNA LÍKANSINS.....	8
1.1.1 Jafna Thorndikes.....	8
1.1.2 Notkun jöfnu Thorndikes í líkaninu	11
1.1.3 Þáttur varmafræðilegra áhrifa í líkaninu	13
1.1.4 Þykktarflokkar verkefnisins.....	14
1.1.5 Jaðar- og upphafsskilyrði í jöfnu Thorndikes.....	15
1.2 HREYFIJAFNA LÍKANSINS	16
1.2.1 Jafna Navier-Stokes-Duhems.....	16
1.2.2 Jaðar- og upphafsskilyrði í jöfnu Navier-Stokes-Duhem	17
1.2.3 Stikagildi líkansins	17
1.2.4 Afþræðileg víxlverkun.....	19
1.3 SAMANTEKT: LÍKANID MCRIM 2.5	20
2. TÖLULEG FRAMSETNING	22
2.1 UPPSETNING REIKNIGRIDDS	22
2.2 BRYTJUN MASSAVARÐVEISLUJÖFNUNNAR	23
2.3 BRYTJUN HREYFIJÖFNUNNAR	24
2.4 UPPSETNING JAÐARSKILYRÐA	27
3. ÚTLEIÐSLA Á JÖFNU THORNDIKES.....	29
3.1 HAFÍSINN SEM SAMFELLT EFNI	29
3.2 VARMAFRÆÐILEG ÁHRIF Á MASSAVARÐVEISLUNA	35
3.3 VARÐVEISLA MASSANS OG LÍKINDAÞÉTTLEIKI.....	36
4. LÝSING Á SPENNUÁSTANDI HAFÍSS	38
4.1 INNGANGUR.....	38
4.2 SPENNUÁSTAND HAFÍSS	41
4.3 ÞAÐ SPENNUÁSTAND SEM LÍKANID MCRIM 2.5 NOTAR	43
5. GAGNAÖFLUN OG LÍKANTILRAUNIR	48
5.1 GAGNAÖFLUN	48
5.1.1 Skráarsöfn líkansins.....	48
5.1.2 Uppsetning hnitakerfis.....	50
5.1.3 Yfirborðsvindar [RIMWND].....	52
5.1.4 Upphafsskilyrði fyrir hafís [RIMICE]	52
5.1.5 Hafstraumar [RIMCUR].....	54
5.2 LÍKANTILRAUNIR	55
5.2.1 Áhrif Neumann jaðarskilyrða í massavarðveislujöfnunni	55
5.2.2 Áhrif dreifiliða og stækkunar kerfisins	57
5.2.3 Varðveisla massans.....	58
6. KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 2. JANÚAR 1997.....	61
6.1 VENJULEG KEYRSLA	61
6.2 SAMANBURÐUR VIÐ RAUNVERULEIKANN	64
6.3 ÁHRIF STYRKS ÍSSINS Á KEYRSLU	67
6.4 ÁHRIFUM CORIOLISKRAFTS SLEPPT.....	68
6.5 ÁHRIFUM HAFSTRAUMA SLEPPT	70
6.6 ENGIN ÞYKKTARDREIFING VIÐ $t=0$	71
6.7 SEIGT FLÆÐI	72

7. KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 10. JANÚAR 1997.....	75
7.1 VENJULEG KEYRSLA	75
7.2 SAMANBURÐUR VIÐ RAUNVERULEIKANN	77
7.3 ÁHRIF STYRKS ÍSSINS Á KEYRSLU	78
7.4 ÁHRIFUM CORIOLISKRAFTS SLEPPT	79
7.5 ÁHRIFUM HAFSTRAUMA SLEPPT	80
7.6 ENGIN ÞYKKTARDREIFING VIÐ $t=0$	81
8. KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 18. JANÚAR 1997.....	83
8.1 VENJULEG KEYRSLA	83
8.2 SAMANBURÐUR VIÐ RAUNVERULEIKANN	85
8.3 ÁHRIF STYRKS ÍSSINS Á KEYRSLU	86
8.4 ÁHRIFUM CORIOLISKRAFTS SLEPPT	87
8.5 ÁHRIFUM HAFSTRAUMA SLEPPT	88
8.6 ENGIN ÞYKKTARDREIFING VIÐ $t=0$	90
9. NIÐURSTAÐA OG LOKAORÐ	91
HEIMILDASKRÁ.....	94
ÞAKKIR.....	97

VIÐAUKI A: ÁGRIP AF HUGMYNDAFRÆÐI SAMFELLDRA EFNA

VIÐAUKI B: VARÐVEISLA MASSANS

VIÐAUKI C: VARÐVEISLA SKRÍÐÞUNGANS

VIÐAUKI D: VARÐVEISLA ORKUNNAR

VIÐAUKI E: MOHR-HRINGURINN

VIÐAUKI F: GALLI Á HUGMYNDAFRÆÐI HIBLERS

VIÐAUKI G: FORRITIN LesaBOF OG LesaPRT

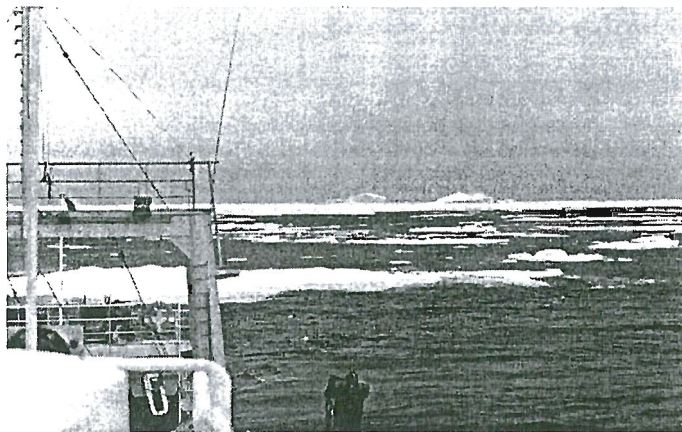
VIÐAUKI H: MATLAB FORRIT TIL FRAMSETNINGAR Á NIÐURSTÖÐUM

INNGANGUR

Rit þetta fjallar um kanadískt skammtíma hafíslíkan sem er nefnt *Multi Category Regional Ice Model, version 2.5* (MCRIM 2.5). Fjallað er um fræðilega undirstöðu þess, uppsetningu þess á Veðurstofu Íslands og tilraunir með hafísspár fyrir íslensk hafsvæði. Tilgangur þessa verkefnis er að gera grein fyrir helstu áhrifaþáttum í hreyfingu hafíss við Ísland og koma með uppástungur um næstu skref varðandi líkananotkun við hafísspár á Veðurstofu Íslands.

Til eru tvær gerðir hafíslíkana: skammtíma og langtíma líkön. Seinni tegundin er veðurfarslegs eðlis. Þar er sóst eftir langtíma áhrifum loftslags og hafs á útbreiðslu, myndun, eyðingu og hreyfingu hafíss yfir tugi til hundruða ára. Aðstreymishluta hreyfijöfnunnar er sleppt til að gera svo langa keyrslu mögulega. Þetta er ekki gert í skammtíma líkönum því þar er þessi liður jafn mikilvægur og breyting hraða með tilliti til tíma.

Með skammtíma líkani er leitast við að reikna staðsetningu hafíss mun nákvæmar en gert er í langtíma líkani. Líkanið reiknar nokkra daga fram í tímann. Markmiðið með þessari gerð er að geta gefið viðeigandi viðvaranir skipum á siglingu um hafíssvæði. Hér á Norður Atlantshafi með Austur-Grænlandsstrauminn ekki langt í burtu, getur samspil óhagstæðra vinda, hafstrauma og annarra þátta leitt til aðstreymis hafíss að Íslandi. Oft kemur fyrir að siglingaleið um Horn sé ófær vegna þessa. Það væri óneitanlega kostur að geta sagt fyrir um slíkt áður en skip leggja úr höfn.



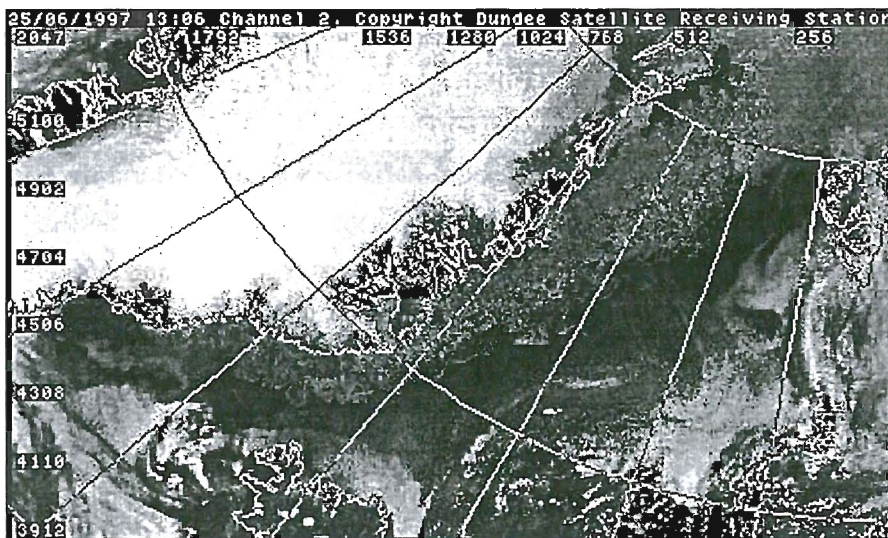
Mynd 0.1: Siglt um hafíssvæði. Mynd tekin af Þór Jakobssyni um borð í Bjarna Sæmundssyni.

Hingað til hafa hafíshorfur verið ákvarðaðar samkvæmt upplýsingum um ísjaðarinn á tilteknum tíma og reynt að meta hreyfingu hans næstu daga með því að skoða veðurspá og taka tillit til meðalhafstrauma á svæðinu. Hér gegnir reynsla og tilfinning stóru hlutverki. Galli slíkra aðferða er sá að nákvæmni slíkra spáa minnkar hratt með spátímalengd.

Tilraunakeyrlur þessa verkefnis eru þrjár: 1) Með upphafstíma 2. janúar 1997 2) með upphafstíma 10. janúar 1997 og 3) með upphafstíma 18. janúar 1997. Hver keyrsla er sjö daga fram í tímann þannig að keyrslutímabil líkansins er frá 2. til 25. janúar 1997. Ástæðurnar fyrir því að þetta tímabil var valið eru tvær. 1) Töluverður hafs var á íslensku hafsvæði á þessu

tímabili og mikil hreyfing á honum. Náði hafísinn meðal annars að loka fyrir siglingaleið um Horn á þessu tímabili. Höfundur fannst áhugavert að sjá hvort líkanið gæti náð að lýsa þessum hreyfingum því það eru einmitt þessar miklu hreyfingar sem æskilegt er að geta spáð fyrir. 2) Á þessu tímabili fór Landhelgisgæsla Íslands töluvert oftari en venjulega í ísflug. Þessi ísflug veita haldbestu upplýsingarnar þegar tiltaka þarf upphafsskilyrði fyrir hafís í líkaninu og taldi höfundur því kjörið að taka þetta tímabil fyrir.

Hafísinn sem fer inn á íslensk hafsvæði kemur aðallega frá Norður-Íshafi eins og mynd 0.2 sýnir og flyst hann þaðan með Austur-Grænlandsstraumnum. Sumt af ísnum sem kemur af þessu svæði er þó nýmyndaður hafís vegna kulda þar. Einnig á sér stað ísmyndun á svæðinu sjálfu.



Mynd 0.2: Gervihnattarmynd á sýnilega sviðinu frá Dundee-stofnuninni. Hér sést greinilega hvernig hafísinn streymir frá norðurlöndum. Birt með leyfi Dundee Satellite Receiving Station.

Einn helsti galli líkansins er að vaxtarhraði hafíss í líkaninu er látinn vera óháður tíma og rúmi. Þessi nálgun á rétt á sér fyrir kanadísk hafsvæði: Ekkert aðstreymi af heitum sjó á sér stað þar þannig að hitastigsdreifing á yfirborði sjávar er lítil með tilliti til tíma og rúms. Einnig eru vindar þar stöðugir þannig að yfirborðshiti lofts breytist lítið yfir sjö daga tímabil. Þessar aðstæður gilda alls ekki á íslensku hafsvæði. Þar á sér stað aðstreymi af köldum og ferskum sjó frá Norður-Íshafi annars vegar og aðstreymi af heitum og söltum sjó frá Golfstraumi hins vegar. Þess vegna er mikil hitastigsdreifing á yfirborði sjávar með tilliti til rúms og einnig með tilliti til tíma því þessir hafstraumar eru tímaháðir. Yfirborðshiti lofts er mjög breytilegur vegna síbreytilegs veðurfars þannig að yfirborðshiti lofts breytist mikið yfir sjö daga tímabil bæði í tíma og rúmi. Þessir breytilegu hafstraumar og vindar leiða til þess að ofangreind nálgun á vaxtarhraða í líkaninu er frekar léleg fyrir íslensk hafsvæði. Höfundur telur þess vegna það vera jafn slæma nálgun að hafa einhvern vaxtarhraða eins og hreinlega að sleppa

honum. Þess vegna sleppir höfundur notkun á þessum einföldu varmafræðilegu áhrifum líkansins í öllum keyrslum þessa verkefnis.

Mergur málsins er að á Íslandssvæðinu er mun meiri hreyfing á lofthjúpi en það sem gerist almennt annars staðar á jörðinni. Þessi hreyfing lofthjúpsins hefur bein áhrif á hreyfingu hafíssins hér því hann hefur töluvert meira frelsi til að hreyfa sig en almennt gildir á kanadísku hafíssvæði. Til dæmis er allur ísinn þar meira eða minna samfrosti við land þannig að hreyfing hans er ekki mikil. Þess vegna endast hafísupplýsingar hjá kanadísku Veðurstofunni lengur en hafísupplýsingar fyrir íslensk hafsvæði. Sjö daga gamalt ískort gefið út af Landhelgisgæslu Íslands fyrir íslenkst hafsvæði er líklega ónothæft ef miklir vindar hafa ráðið ríkjum það tímabil. Ekki bætir úr skák að frekar sterkir tímaháðir hafstraumar eru gildandi fyrir íslensk hafsvæði. Austur-Grænlandsstraumurinn er ekki langt frá og er einn af sterkustu yfirborðsstraumum heimsins (hefur hann þess vegna stundum verið nefndur “fossinn”). Hvernig svo sem staðið verður að hafísspá í framtíðinni, þá mun gilda um hana eins og fyrir veðurspána, að hætt er við að hún verði röng.

Ástæðan fyrir vali á MCRIM 2.5 frekar en öðru hafíslíkani er að Veðurstofu Íslands var boðin notkun þess af AES (Atmospheric Environment Service). Seinni hluta ársins 1995 fékk svið hafísrannsóknna Veðurstofu Íslands þetta líkan í hendur. Meistaraprófsverkefni höfundar þróaðist út frá tilkomu þess. Vangaveltur voru um annað hafíslíkan sem er hannað af Matti Lepparanta (frá Finnish Institute of Marine Research) en það var ennþá í töluverðri þróun þannig að því var sleppt. Einnig var hugmynd um að Veðurstofan hannaði og þróaði sitt eigið hafíslíkan en það var álitid óraunhæft. Hugmyndir um önnur líkön skutu líka upp kollinum þegar leið á tíma þessa verkefnis, en höfundur taldi best að halda óbreyttri stefnu því hann var þá kominn það langt með uppsetningu kanadíska líkansins.

Sögu líkansins má rekja til ársins 1981 og hefur það verið í þróun síðan. Útgáfa 2.5 var gefin út í ágúst 1992. Líkanið MCRIM er hannað, þróað og keyrt daglega af AES (Atmospheric Environment Service) í Kanada. Núverandi staða líkansins er að verið er að bæta haflíkani inn í það en síðast er höfundur frétti var sú útgáfa ekki tilbúin.

Innihald kafla þessa rits er sem hér greinir:

1. **LÍKANIÐ MCRIM 2.5:** Hér er fjallað um þær jöfnur sem líkanið byggir á og lýsa hreyfingu hafíssins. Fyrst er fjallað um þá massavarðveislujöfnu sem notuð er í líkaninu. Hún er á nokkru öðru formi en venja er. Þar á eftir er farið í lýsingu á hreyfijöfnunni. Hugmyndafræði þeirrar jöfnu byggir á hreyfilögmáli Newtons.
2. **TÖLULEG FRAMSETNING:** Hér er fjallað um tölulega brytjun þeirra jafna sem lýst er í kafla 1. Byrjað er á að lýsa brytjuninni fyrir massavarðveislujöfnuna og síðan fyrir hreyfijöfnuna.

3. **ÚTLEIÐSLA Á JÖFNU THORNDIKES:** Massavarðveislulögmálið sem líkanið notar er kennt við Thorndike en árið 1975 kemur hann með útleiðslu á þessari jöfnu. Höfundur leiðir þessa jöfnu út í þessum kafla á annan hátt en Thorndike gerir.
 4. **LÝSING Á SPENNUÁSTANDI HAFÍSS:** Til að lýsa spennuástandi hafíss þarf svokallaðan spennutensor. Þessi tensor er einn af mörgum liðum sem koma inn í hreyfijöfnuna til reikninga á hafíshraða. Í þessum kafla er fjallað um þann spennutensor sem er notaður í líkaninu. Þessi tensor var settur fram af Hibler 1977 og er útleiðsla og útskýring á honum í þessum kafla.
 5. **GAGNAÖFLUN OG LÍKANTILRAUNIR:** Líkanið þarf á fjórum textaskráum að halda til þess að geta keyrt. Í þessum skráum eru haf- og vindagögn, upphafsdreifing hafíss og önnur gildi sem of langt mál er að telja fram hér. Í þessum kafla er lýst öflun þessara gagna. Í seinni hluta kaflans er fjallað um líkantilraunir til að sjá hvernig líkanið hegðar sér við mismunandi aðstæður.
 6. **KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 2. JANÚAR 1997:** Eins og nafnið gefur til kynna er lýst 7 daga keyrslu með upphafsskilyrði frá 2. janúar 1997. Borið er saman við raunveruleikann og áhrif ýmissa þátta, eins og til dæmis hafstrauma, könnuð.
 7. **KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 10. JANÚAR 1997:** Í þessum kafla er því sama lýst og í kafla 6 nema nú með upphafsskilyrði frá 10. janúar 1997.
 8. **KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 18. JANÚAR 1997:** Í þessum kafla er því sama lýst og í kafla 6 nema nú með upphafsskilyrði frá 18. janúar 1997.
 9. **NIÐURSTAÐA OG LOKAORÐ:** Hér eru niðurstöður frá köflum 6, 7 og 8 teknar saman í eina töflu og umræða er um hana. Í lok þessa kafla setur höfundur síðan fram tvær niðurstöður verkefnisins sem hann telur hvað mikilvægastar.
-

1. LÍKANIÐ MCRIM 2.5

Hér er fjallað um þær jöfnur sem líkanið byggir á og lýsa hreyfingu hafíssins. Fyrst er fjallað um þá massavarðveislujöfnu sem notast er við í líkaninu. Hún er á nokkru öðru formi en venja er. Þar á eftir er farið í lýsingu á hreyfijöfnunni. Hugmyndafræði þeirrar jöfnu byggir á hreyfilögmáli Newtons. Í þessum kafla og í öllu ritinu er notaður svokallaður vísaritháttur (index notation). Þessi tegund af vísam er einungis með litlum stöfum. Ef einhver vísir er með stórum staf er hann ekki hluti af þessum vísarithætti. Ef liður jöfnu hefur tvo vísa, þá eru þeir endurteknir eins og eftirfarandi dæmi sýnir: $v_i(x_p, t)\bar{l}_i = v_1(x_p, t)\bar{l}_1 + v_2(x_p, t)\bar{l}_2 + v_3(x_p, t)\bar{l}_3$. Þetta gildir fyrir þrívítt rúm, en þar sem unnið er í tvívíðu plani í þessu riti þá er $v_i(x_p, t)\bar{l}_i = v_1(x_p, t)\bar{l}_1 + v_2(x_p, t)\bar{l}_2$. Annað dæmi:

$$\frac{\partial(G_I v_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial(G_I v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(G_I v_2)}{\partial x_2}$$

Einnig er eftirfarandi ritháttur almennt samþykktur [Mase ,1970]: $v_i(x_p, t) = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ fyrir þrívítt rúm en $v_i(x_p, t) = v_i(x_1, x_2, t)$ fyrir tvívítt plan.

1.1 Massavarðveislujafna líkansins

1.1.1 Jafna Thorndikes

Massavarðveislujafna Thorndikes [Thorndike et. al. ,1975] er leidd út í kafla 3, en þó á annan hátt en Thorndike gerir. Jafnan er:

$$\frac{\partial G_I}{\partial t} + \frac{\partial(G_I v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(G_I f)}{\partial h} = \Psi_I \quad \forall I \in [1, MAX] \quad (1.1.1)$$

- $\bar{v} = \bar{v}(x_1, x_2, t) = v_i(x_1, x_2, t)\bar{l}_i = v_i(x_p, t)\bar{l}_i$ er hraði hafíss í tvívíðu plani.
- $f = f(x_p, h, t)$ er vaxtarhraði hafíss.
- x_1 og x_2 er rúmvíddin í tvívíðu plani.
- t táknar tíma.
- h er hafísvídd hornrétt á fyrrgreint tvívítt plan. Þessari vídd er skipt niður í hlutmengi sem nefnast þykktarflokkar (categories):

$$h \rightarrow [h_0, h_1 [, \dots \dots, [h_{I-1}, h_I [, \dots \dots, [h_{MAX-1}, h_{MAX} [\quad (1.1.2)$$

Í hverju hlutmengi er skilgreind meðalísþykkt $h_{I-1/2} \in [h_{I-1}, h_I [$:

$$h \rightarrow [h_0, h_1 [, \dots \dots, [h_{I-1}, h_I [, \dots \dots, [h_{MAX-1}, h_{MAX} [$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ h_{1/2} & h_{I-1/2} & h_{MAX-1/2} \end{array}$$

- h_{MAX} er mesta mögulega ísþykkt sem kerfið getur haft. Í þessu riti er kerfi skilgreint sem það svæði sem útreikningar á tilsvareandi eðlisfræðilegu lögmáli ná yfir.

- MAX er fjöldi hlutmengja (fjöldi þykktarflokka) sem ísnum er skipt niður í. Fyrir hvert hlutmengi er ein varðveislujafna þannig að fjöldi þeirra er MAX eins og jafna (1.1.1) sýnir. Hafíslíkon sem hafa þessa uppsetningu eru kölluð “multi-category”.
- G_I segir til um hve stór hluti af flatarmáli griddsellunnar¹ er með ísþykkina $h \in [h_{I-1}, h_I[$. Þetta fall er nefnt **uppsafnað þykktardreifingarfall** (cumulative thickness distribution).

Vegin meðalþykkt hafíss í tilsvareandi griddsellu reiknast samkvæmt:

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \sum_{I=1}^{MAX} h_{I-1/2} G_I(x_p, t) \quad (1.1.3)$$

- $\langle h(x_p, t) \rangle$ er vegin meðalþykkt hafíss í griddsellu sem hefur hnitin x_p .

Heildarþéttleiki hafíss í tilsvareandi griddsellu reiknast samkvæmt:

$$C(x_p, t) = \sum_{I=2}^{MAX} G_I(x_p, t) \quad (1.1.4)$$

Summan byrjar á gildinu $I = 2$ en ekki á $I = 1$ því fyrsti þykktarflokkurinn er meðhöndlaður sem opið haf og krap og reiknast því ekki með í heildarþéttleika hafíss. Seinna í þessum kafla verður farið í dæmi á notkun G_I -fallsins og þar mun þetta koma betur fram.

- $C(x_p, t)$ er heildarþéttleiki hafíss (total compactness) í griddsellu sem hefur hnitin x_p .

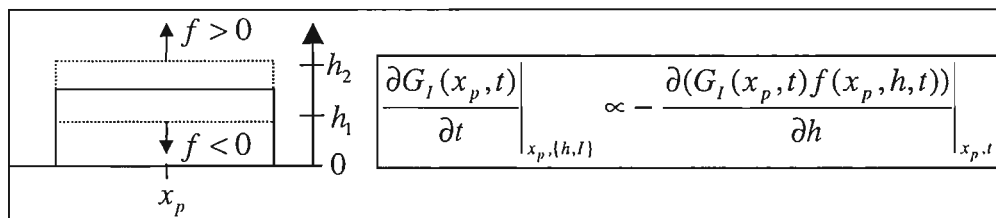
Einnig gildir:

$$\sum_{I=1}^{MAX} G_I(x_p, t) \equiv 1 \quad (1.1.5)$$

- Ψ_I kallast endurdreifingarfall (redistribution function) og lýsir það þeirri breytingu á G_I inni í griddsellunni vegna aflfræðilegra áhrifa sem eru nefndar pökkun (rafting) og reising (riding). Nánari lýsing á þessu má sjá í mynd 1.3. Fræðin bakvið þetta fall eru flókin, en ítarlega umfjöllun má sjá í [Thorndike et. al. ,1975] og í [Reimer et. al. ,1980].

Hægt er að túlka jöfnu (1.1.1) sem heildisjöfnu (sjá jöfnu (3.1.19) í kafla 3.1), þar sem flæði hafíss (samfelldra hafísagna) um griddsellur kerfisins á sér stað.

Eins og áður kom fram er “ís-víddinni” skipt niður í þykktarflokka. Flyst hafísinn milli þeirra með varmafræðilegri ísmyndun eða bráðnun, í gegnum $\partial(G_I f)/\partial h$ liðinn²:

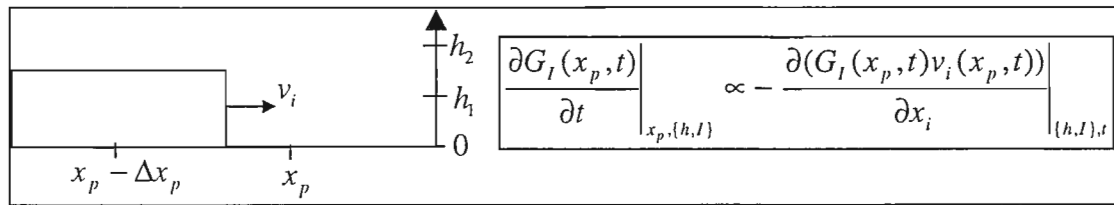


Mynd 1.1: Varmafræðileg áhrif í massavarðveislujöfnunni.

¹ Þar sem lausn á jöfnu (1.1.1) er með tölulegum hætti er kerfinu skipt niður í jafnstóra búta kallaðir griddsellur. Nánari umfjöllun um þetta má sjá í kafla 2.

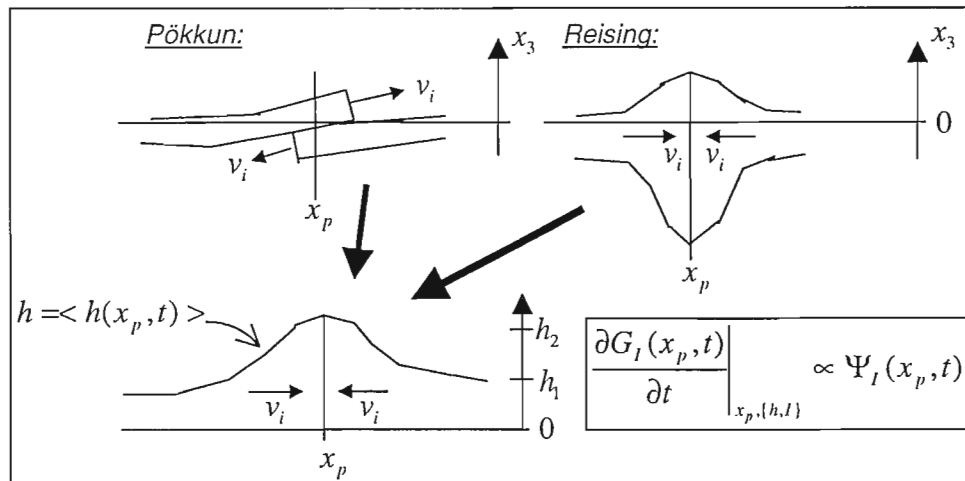
² Stærðirnar $G_I(x_p, t)$ og $\Psi_I(x_p, t)$ eru háðar stærðinni h í gegnum vísinn I . Vegna þessara tengsla er ritað $\{h, I\} = \text{fasti}$ í tilsvareandi hlutafléiðu í staðinn fyrir einungis $h = \text{fasti}$ eða $I = \text{fasti}$, í myndum 1.1 til 1.3.

Einnig flyst hann til með aðstreymi hafíss (advection) í gegnum $\partial(G_I v_i)/\partial x_i$ liðinn:



Mynd 1.2: Áhrif aðstreymishlutans í massavarðveislujöfnunni.

Og að lokum með þökkun (rafting) eða reisingu (ridging) í gegnum Ψ_I liðinn:



Mynd 1.3: Áhrif endurdreifingarfallsins í massavarðveislujöfnunni.

Einfaltt dæmi um notkun á uppsafnaða þykktardreifingarfallinu G_I :

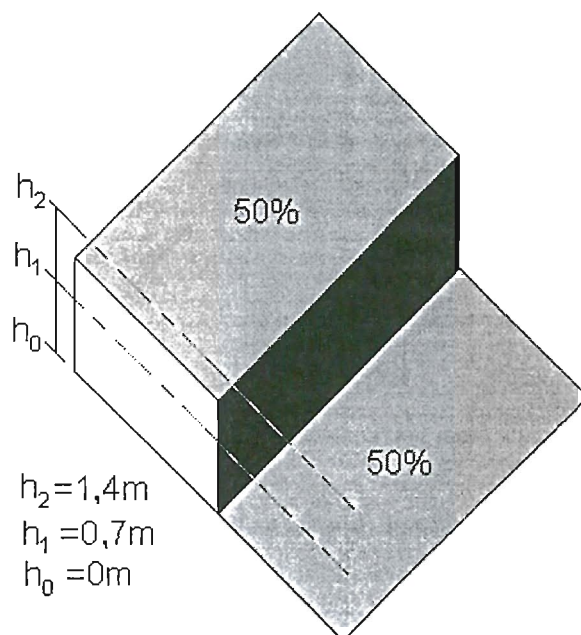
Ef gert er ráð fyrir að aðeins tveir þykktarflokkar séu í ákveðnu kerfi eins og mynd 1.4 sýnir, þá er gildið MAX jafnt og 2. Ef litið er á eina griddsellu í þessu kerfi þar sem helmingur flatarmáls griddsellunar (sjá kafla 2.1) er þakinn ís með þykktinni $1m$ og hinn helmingurinn er opið haf og ískrap (sjá mynd 1.4), fæst eftirfarandi:

- Þykktarflokkur 1: $h \in [h_0, h_1] = [0m, 0,7m]$; $G_1(x_p, t) = 0,5$ með $h_{1/2} = 0,01m$ ($h_{1/2}$ er valið af hentugleika en þó þannig að $h_{1/2} \in [h_0, h_1]$).
- Þykktarflokkur 2: $h \in [h_1, h_2] = [0,7m, 1,4m]$; $G_2(x_p, t) = 0,5$ með $h_{3/2} = 1m$ (Eins og með þykktarflokk 1, þá er $h_{3/2}$ er valið af hentugleika en þó þannig að $h_{3/2} \in [h_1, h_2]$).

Út frá jöfnu (1.1.3) og jöfnu (1.1.4) fæst nú:

$$\langle h \rangle = \sum_{I=1}^2 h_{I-1/2} G_I(x_p, t) = 0,01m \cdot 0,5 + 1m \cdot 0,5 = 0,505m$$

$$C = \sum_{I=2}^2 G_I = 0,5 \rightarrow 50\% \text{ af flatarmáli griddsellunar er með hafís.}$$

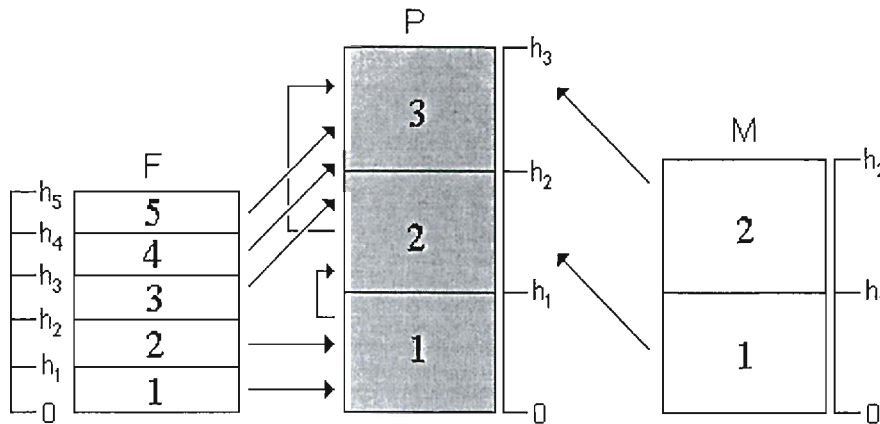


Mynd 1.4: Þykktardreifing í griddselli.

1.1.2 Notkun jöfnu Thorndikes í líkaninu

Í líkaninu er hafísinn flokkaður eftir aldri. Þetta er gert vegna þess að í hinu náttúrulega umhverfi breytast eðlisfræðilegir eiginleikar hafíssins með tíma. Einnig er hann greindur eftir því hvort hann er pakkaður/reistur eða ekki, því að eiginleikar hans breytast einnig eftir því:

Líkanið hefur þrjá **tegundahópa**: **Fyrsta árs ís** (first-year categories), **margra ára ís** (multi-year categories) og **pakkaður/reistur ís** (rubbled categories. Orðin “rafted ice” og “ridged ice” eru oft nefnd í einu orði “rubbled ice”). Innan hvers **tegundahóps** er mismunandi fjöldi **þykktarflokka** (categories), samanber jöfnu (1.1.2). Fyrir hvern tegundahóp gildir jafna (1.1.1), þannig að þrjár slíkar jöfnur fást í staðinn fyrir eina. Ástæðan er sú að útleiðsla jöfnu (1.1.1) gerir ráð fyrir einsleitu efni eða með öðrum orðum, einum tegundahópi. Innan hvers tegundahóps flyst ísinn milli þykktarflokka (categories) með varmafræðilegri ísmyndun/bráðnun (mynd 1.1) eða með aðstreymi (advection) í hafísflæði (mynd 1.2). Vegna þess að nú er unnið með pakkaðan/reistan ís sem sérstakan tegundahóp, en ekki sem hluta hinna tegundahópanna tveggja (fyrsta- og margra ára ís) breytist endurdreifingarfallið Ψ , samfara því: Ísþykkt í tegundahópi fyrsta árs og margra ára íss færir sig ekki lengur til um sína þykktarflokka í gegnum þökkun/reisingu eins og mynd 1.3 sýnir heldur fer ísinn í tegundahópinn pakkaður/reistur ís. Fyrir tegundahópinn pakkaður/reistur ís er endurdreifingarfallið óbreytt, því þar getur ísinn farið um þykktarflokka sína með frekari þökkun eða reisingu. Mynd 1.5 lýsir dæmi af þessu, en þar benda örvarnar á þá tegund sem tilvarandi ís fer í þegar þökkun/reising á sér stað. Þar stendur P fyrir pakkaður/reistur ís, F fyrir fyrsta árs ís og M fyrir margra ára ís.



Mynd 1.5: Örvanar benda á þann þykktarflokk sem tilsvareandi tegundaflokkur fer í þegar þökkun á sér stað.

Í jöfnu (1.1.1) er $G_I(x_p, t)$ almennt uppsafnað þykktardreifingarfall fyrir einsleitt efni. Stærðin $GF_I(x_p, t)$ táknar uppsafnað þykktardreifingarfall fyrir tegundahópin fyrsta árs ís, $GP_I(x_p, t)$ fyrir pakkaðan/reistan ís og $GM_I(x_p, t)$ fyrir margra ára ís. Eins og áður hefur verið nefnt þá er jafna (1.1.1) látin gilda fyrir hvern tegundahóp í líkaninu:

$$\frac{\partial GF_I}{\partial t} + \frac{\partial(GF_I v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(GF_I f^F)}{\partial h} = \Psi_I^F \quad \forall I \in [1, FMAX] \quad (1.1.6)$$

$$\frac{\partial GP_J}{\partial t} + \frac{\partial(GP_J v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(GP_J f^P)}{\partial h} = \Psi_J^P \quad \forall J \in [1, PMAX] \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial GM_K}{\partial t} + \frac{\partial(GM_K v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(GM_K f^M)}{\partial h} = \Psi_K^M \quad \forall K \in [1, MMAX] \quad (1.1.8)$$

Hér eru f^F , f^P , f^M og Ψ_I^F , Ψ_J^P , Ψ_K^M vaxtarhraði og endurdreifingarfall tilsvareandi tegundahópa.

Innan tegundahópsins fyrsta árs ís getur fjöldi þykktarflokka verið í mesta lagi 8 ($FMAX = 8$), en í það minnsta 1 ($FMAX = 1$). Fyrir pakkaðan/reistan ís getur mesti fjöldi þykktarflokka verið 4 ($PMAX = 4$), en í það minnsta 1 ($PMAX = 1$). Innan þykktartegundarinnar margra ára ís getur fjöldi þykktarflokka verið í mesta lagi 2 ($MMAX = 2$), en í það minnsta 0 ($MMAX = 0$). Gildin $FMAX$, $PMAX$ og $MMAX$ verða einnig að uppfylla skilyrðin:

$$2 \leq FMAX + PMAX + MMAX \leq 10$$

Hliðstætt jöfnu (1.1.5) verður eftirfarandi jafna að gilda því að jöfnur (1.1.6) til (1.1.8) verða í sameiningu að gilda í sömu griddsellunni:

$$\sum_{I=1}^{FMAX} GF_I + \sum_{I=1}^{PMAX} GP_I + \sum_{I=1}^{MMAX} GM_I \equiv 1 \quad (1.1.9)$$

Þó að líkanið hafi þessa þrjú tegundahópa hafíss eru hóparnir ekki nýttir í núverandi útgáfu (útgáfa 2.5). Með öðrum orðum þá eru þessir þrjú tegundahópar látnir hafa sömu eðlisfræðilegu eiginleika. Til dæmis er sami varmafræðilegi vaxtarhraðinn f látinn gilda fyrir alla tegundahópa: $f^F = f^P = f^M = f$. Einnig er þökkun íssins höfð óháð aldri hans:

$\Psi_I^F = \Psi_K^M$. Þessi flokkun í tegundahópa er gerð til að auðvelda frekari þróun líkansins um ókomna framtíð. Líkannotandi mun eiga auðveldara með að bæta mismunandi eðlisfræðilegum eiginleikum inn í líkanið þar sem það hefur þessa fyrrgreinda flokkun í tegundahópa. Í núverandi útgáfu (útgáfa 2.5) gildir:

$$f^F = f^P = f^M = f \quad (1.1.10)$$

$$\Psi_I^F = \Psi_K^M \quad (1.1.11)$$

$$\Psi_I^P = \Psi_I \quad (1.1.12)$$

Stærðin Ψ_I er eins og áður endurdreifingarfallið frá kafla 1.1.1.

1.1.3 Þáttur varmafræðilegra áhrifa í líkaninu

Almennt er vaxtarhraði íss með þykktina h við yfirborðshita sjávar T_{sea} og við yfirborðshita lofthjúps T_{air} ritaður sem $f(h, T_{sea}(x_p, t), T_{air}(x_p, t)) = f(x_p, h, t)$. Í líkaninu er notað empírískt vaxtarhraðafall [Anderson, 1961]:

$$f(h_{I-1/2}, DTEMP) = \left[\frac{3,88 \cdot 10^{-5}}{h_{I-1/2} + 2,55} \right] \cdot DTEMP \quad [cm \ s^{-1}] \quad (1.1.13)$$

$$DTEMP = (T_{air} - T_{sea})$$

Galli líkansins er að það notar aðeins eitt $DTEMP$ -gildi og lætur það gilda fyrir öll tímaskref og í öllum griddsellum. Þessi nálgun á rétt á sér fyrir kanadísk hafsvæði: Ekkert aðstreymi á heitum sjó á sér stað þar þannig að hitastigsdreifing á yfirborði sjávar er lítil með tilliti til tíma og rúms. Einnig eru vindar þar stöðugir þannig að yfirborðshiti lofts breytist lítið yfir sjö daga tímabil, þ.e. það tímabil sem spá nær yfir. Þessar aðstæður gilda alls ekki á íslensku hafsvæði: Þar á sér stað aðstreymi af köldum og ferskum sjó frá Norður-Íshafi annars vegar og aðstreymi af heitum og söltuðum sjó frá Golfstraumi hins vegar. Þess vegna er mikil hitastigsdreifing á yfirborði sjávar með tilliti til rúms og einnig með tilliti til tíma því þessir hafstraumar eru tímaháðir. Yfirborðshiti lofts er mjög breytilegur vegna síbreytilegs veðurfars þannig að yfirborðshiti lofts breytist mikið yfir sjö daga tímabil bæði í tíma og rúmi. Þessir breytilegu hafstraumar og vindar leiða til þess að ofangreind nálgun á vaxtarhraða í líkaninu er frekar léleg fyrir íslensk hafsvæði. Höfundur telur þess vegna það vera jafn slæma nálgun að hafa einhvern vaxtarhraða eins og hreinlega að sleppa honum. Þess vegna lætur höfundur $DTEMP = 0^\circ C$ gilda fyrir alla útreikninga í þessu verkefni. Með öðrum orðum þá gildir alltaf:

$$f^F = f^P = f^M = f = 0 \ m \ s^{-1} \quad (1.1.14)$$

Gildið $DTEMP = 0^\circ C$ er látið í textaskrá sem nefnist RMCNTL en um þá skrá verður aðeins rætt í köflum 1.2.3 og 2. Ítarlegri umfjöllun um þessa skrá verður í kafla 5: “Gagnaöflun og líkantilraunir”. Gildið $DTEMP = 0^\circ C$ er sett í textaskrána **RMCNTL**.

1.1.4 Þykktarflokkar verkefnisins

Í þessu verkefni er hafísvíddinni fyrir tegundahópinn fyrsta árs ís, skipt niður í fjögur hlutmengi (eða fjóra þykktarflokka):

1. Opíð hafsvæði og ískrap, $I = 1$: $h_{I-1/2} = 0,01m \wedge h \in [0m, 0,1m[$, það er $h_0 = 0m$ og $h_1 = 0,1m$, samanber jöfnu (1.1.2).
2. Grá-hvítur ís, $I = 2$: $h_{I-1/2} = 0,225m \wedge h \in [0,1m, 0,45m[$.
3. Fyrsta árs meðal-þykkur ís, $I = 3$: $h_{I-1/2} = 0,7m \wedge h \in [0,45m, 1,2m[$.
4. Fyrsta árs þykkur ís, $I = 4$: $h_{I-1/2} = 1,4m \wedge h \in [1,2m, 3m[$.

Pakkaður/reistur ís er skipt í tvö hlutmengi:

1. Pakkaður eða reistur ís með $J = 1$: $h_{J-1/2} = 0,45m \wedge h \in [0m, 0,9m[$.
2. Pakkaður eða reistur ís með $J = 2$: $h_{J-1/2} = 2,0m \wedge h \in [0,9m, 11,36m[$.

Margra ára ís hefur aðeins eitt hlutmengi:

1. Margra ára ís með $K = 1$: $h_{K-1/2} = 2,613m \wedge h \in [0m, 5m[$.

Til að einfalda framsetningu má þjappa saman jöfnum (1.1.6) til (1.1.8) í eina jöfnu:

$$\boxed{\frac{\partial G_I}{\partial t} + \frac{\partial(G_I v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(G_I \tilde{f})}{\partial h} = \tilde{\Psi}_I \quad \forall I \in [1, TMAX]} \quad (1.1.15)$$

þar sem $TMAX = FMAX + PMAX + MMAX$ og:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f^F & I \in [1, FMAX] \\ f^P & I \in [FMAX + 1, FMAX + PMAX] \\ f^M & I \in [FMAX + PMAX + 1, TMAX] \end{cases}$$

$$\tilde{\Psi}_I = \begin{cases} \Psi_I^F & I \in [1, FMAX] \\ \Psi_I^P & I \in [FMAX + 1, FMAX + PMAX] \\ \Psi_I^M & I \in [FMAX + PMAX + 1, TMAX] \end{cases}$$

- $\boxed{I=1}$: $h_{I-1/2} = 0,01m \wedge h \in [0m, 0,1m[$
- $\boxed{I=2}$: $h_{I-1/2} = 0,225m \wedge h \in [0,1m, 0,45m[$
- $\boxed{I=3}$: $h_{I-1/2} = 0,7m \wedge h \in [0,45m, 1,2m[$
- $\boxed{I=4}$: $h_{I-1/2} = 1,4m \wedge h \in [1,2m, 3m[$
- $\boxed{I=5}$: $h_{I-1/2} = 0,45m \wedge h \in [0m, 0,9m[$
- $\boxed{I=6}$: $h_{I-1/2} = 2,0m \wedge h \in [0,9m, 11,36m[$
- $\boxed{I=7}$: $h_{I-1/2} = 2,613m \wedge h \in [0m, 5m[$

Nú er jafna (1.1.9) eftirfarandi:

$$\sum_{l=1}^{TMAX} G_l = 1 \quad (1.1.16)$$

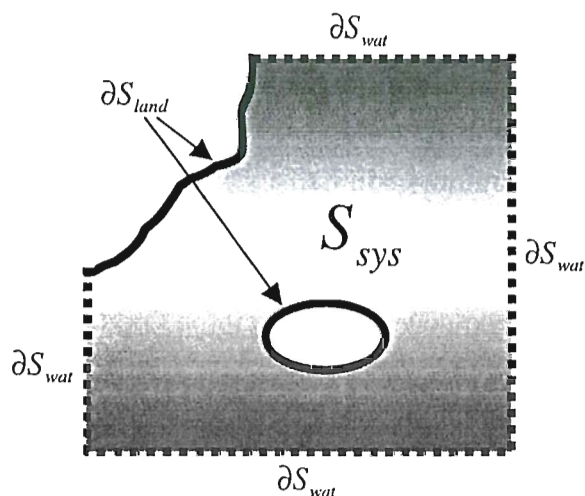
Þegar rætt er um massavarðveislujöfnuna í líkaninu er ætíð átt við jöfnu (1.1.15). Jöfnur (1.1.3) og (1.1.4) eru áfram gildar, því jöfnur (1.1.6) til (1.1.8) eiga í sameiningu að gilda í sömu griddsellunni:

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \sum_{l=1}^{TMAX} h_{l-1/2} G_l(x_p, t) \quad (1.1.17)$$

$$C(x_p, t) = \sum_{l=2}^{TMAX} G_l(x_p, t) \quad (1.1.18)$$

1.1.5 Jaðar- og upphafsskilyrði í jöfnu Thorndikes

Í þessu verkefni eru tvennskonar jaðrar: Jaðar við landsvæði (með öðrum orðum, á strönd landsvæðis) og jaðar á opnu hafsvæði. Landjaðarinn er táknaður með ∂S_{land} en jaðar á opnu hafsvæði er táknaður með ∂S_{wat} . S_{sys} táknar það svæði sem útreikningar á jöfnu (1.1.15) ná yfir eða með öðrum orðum S_{sys} táknar svæði kerfisins. Mynd 1.6 sýnir dæmi af ofangreindu fyrirkomulagi. Á ∂S_{land} er Dirichlet skilyrðið látið gilda: $G_l = 0$, en á ∂S_{wat} er Neumann skilyrðið látið gilda: $\partial G_l / \partial x_i = 0$. Líkanið setur sjálfkrafa upp þessi jaðarskilyrði þannig að líkannotandi þarf ekki að huga að þeim sérstaklega. Öðru máli gegnir um upphafsskilyrðið: $G_l \forall x_p \in S_{sys} \wedge t = 0$. Þetta gildi segir til um hvar ísjaðarinn er og hver þykktardreifingin er við upphaf útreikninga líkansins ($t = 0$). Gildið $G_l \forall x_p \in S_{sys} \wedge t = 0$ er látið í textaskrá sem heitir **RIMICE** og er hún lesin inn í líkanið við upphaf keyrslu þess.



Mynd 1.6: ∂S_{land} er landjaðar, ∂S_{wat} er jaðar á opnu hafsvæði og S_{sys} er kerfið.

Með tilliti til massavarðveislunnar þá gengur verkefni þessa rits þannig út á að leysa eftirfarandi hlutafleiðujöfnuverkefni:

Hlutfleiðujafna [jafna (1.1.15)]:

$$\frac{\partial G_I}{\partial t} + \frac{\partial(G_I v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(G_I \tilde{f})}{\partial h} = \tilde{\Psi}_I \quad \forall I \in [1, TMAX]$$

Upphafsskilyrði:

$$G_I \quad \forall x_p \in S_{\text{sys}} \wedge t = 0$$

Jaðarskilyrði:

1. Dirchlet skilyrði: $G_I = 0$ á ∂S_{land}
2. Neumann skilyrði: $\partial G_I / \partial x_i = 0$ á ∂S_{vat}

1.2 Hreyfijafna líkansins

1.2.1 Jafna Navier-Stokes-Duhems

Líkanið notar Navier-Stokes-Duhem jöfnuna til að reikna út hreyfingu á hafís. Þar sem sú útleiðsla er vel þekkt er óþarft að endurtaka hana hér. Þó er hún gerð í viðauka A fyrir áhugasama. Navier-Stokes-Duhem jafnan fyrir hafís er:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\rho f^c \varepsilon_{ijk} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{\text{air}} + \tau_i^{\text{wat}} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad (1.2.1)$$

- $\vec{v} = v_i(x_1, x_2, t) \vec{l}_i$ er hraði hafíss í tvívíðu rúmi.
- f^c er stuðull Coriolis (Coriolis parameter), sjá viðauka A.
- ε_{ijk} er umröðunartáknið (permutation symbol) (til dæmis gildir $\varepsilon_{ijk} v_k \vec{l}_i \equiv \vec{l}_3 \times \vec{v}$).
- σ_{ij} er spennutensor, en hann lýsir aflfræðilegri víxlverkun í hafísnum
- τ_i^{air} er skerspenna frá vindum yfir hafís.
- τ_i^{wat} er skerspenna frá hafstraumi undir hafís.
- g er þyngdarhröðun jarðar ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).
- ξ er hæð hafflatar.
- $\partial \xi / \partial x_i$ er halli hafflatar, reiknaður samkvæmt jöfnu (1.2.6) (sjá síðar).

Þar sem hafísinn er meðhöndlaður sem tvívítt efni, eru aðeins fyrstu tvær víddirnar í ofangreindri jöfnu notaðar: Skrifað er $i, j, k = 1, 2$ í stað $i, j, k = 1, 2, 3$. Þetta leiðir til þess að ρ er massi á flatareiningu í stað massa á rúmmálseiningu:

$$\rho = \rho(x_p, t) = \rho_{\text{ice}} \cdot \langle h(x_p, t) \rangle \quad (1.2.2)$$

- ρ_{ice} er eðlismassi hafíss og er hann meðhöndlaður sem fasti í líkaninu ($\rho_{\text{ice}} = 910 \text{ kg m}^{-3}$).
- $\langle h(x_p, t) \rangle$ er vegin meðalþykkt hafíss, samanber jöfnu (1.1.17).

1.2.2 Jaðar- og upphafsskilyrði í jöfnu Navier-Stokes-Duhem

Eins og í kafla 1.1.5 þá er landjaðarinn táknður með ∂S_{land} og jaðar á opnu hafsvæði er táknður með ∂S_{vat} . S_{sys} táknar það svæði sem útreikningar á jöfnu (1.2.1) ná yfir eða með öðrum orðum S_{sys} táknar svæði kerfisins. Á ∂S_{land} er Dirichlet skilyrðið látið gilda: $v_i = 0$, en á ∂S_{vat} er Neumann skilyrðið látið gilda: $\partial v_i / \partial x_j = 0$. Líkanið setur sjálfkrafa upp þessi jaðarskilyrði þannig að líkannotandi þarf ekki að huga að þeim sérstaklega. Sama máli gegnir um upphafsskilyrðið: $v_i \forall x_p \in S_{sys} \wedge t = 0$. Þetta gildi segir til um hraða hafíss við upphaf útreikninga líkansins ($t = 0$). Það er ógerlegt að mæla slíkt gildi, því stærð kerfisins S_{sys} er of stórt. Í staðinn er reiknaður út upphafshraði frá tímaóháðu hreyfijöfnunni við $t = 0$:

$$0 = -\rho f^c \varepsilon_{ijk} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad (1.2.3)$$

Tæknileg útfærsla á þessu fyrirkomulagi verður útskýrð í kafla 2.3: “Brytjun hreyfijöfnunnar”. Niðurstaða þessara útreikninga er notuð sem upphafshraði fyrir tímaháðu hreyfijöfnuna.

Með tilliti til hreyfijöfnunnar þá gengur verkefni þessa rits út á að leysa eftirfarandi hlutafleiðujöfnuverkefni:

Hlutafleiðujafna [jafna (1.2.1)]:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\rho f^c \varepsilon_{ijk} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$$

Upphafsskilyrði:

$$v_i \forall x_p \in S_{sys} \wedge t = 0$$

Jaðarskilyrði:

1. Dirichlet skilyrði: $v_i = 0$ á ∂S_{land}
2. Neumann skilyrði: $\partial v_i / \partial x_j = 0$ á ∂S_{vat}

1.2.3 Stikagildi líkansins

Eins og sést í jöfnu (1.2.1), þá eru tveir skerspennuliðir til staðar í hreyfijöfnunni τ_i^{air} og τ_i^{wat} . Þetta eru þau stikagildi sem koma inn í líkanið og eru þau reiknuð út frá vinda- og hafstraumagögnum. Líkanið tekur inn vindagögnin frá textaskrá sem nefnist **RIMWND** en hafstraumagögnin eru lesin frá textaskrá sem nefnast **RIMCUR**. Líkannotandinn ræður hvort hann notar tímaháð eða tímaóháð gögn í skránum RIMWND og RIMCUR. Í þessu verkefni eru vindagögnin tímaháð en hafstraumarnir tímaóháðir.

Jafna fyrir skerspennu frá vindi yfir hafís er gefin sem [Neralla et.al. ,1988]:

$$\tau_i^{air} = \rho_{air} C_{air} \sqrt{u_j^{air} u_j^{air}} \left(u_i^{air} \cos(\theta_{air}) + \varepsilon_{i3k} u_k^{air} \sin(\theta_{air}) \right) \quad (1.2.4)$$

Fyrir utan vindagögnin þá verða öll gildi jöfnu (1.2.4) að vera tímaóháð. eru þau lesin inn frá textaskrá sem nefnist **RMCNTL**. Í kafla 5 verður þessi skrá útskýrð nánar. (Til þess að geta framkvæmt útreikninga þarf líkanið á fjórum textaskráum að halda: RIMICE (sjá kafla 1.1.5), RIMWND, RIMCUR og RMCNTL en þetta verður skoðað betur í kafla 5: “Gagnaöflun”).

- ρ_{air} er eðlismassi lofts. $\rho_{air} = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ í **RMCNTL**.
- C_{air} er skerspennustuðull (drag coefficient) og er hann breytilegur aðallega eftir því í hvaða hæð vindurinn er mældur (eða reiknaður). $C_{air} = 3 \cdot 10^{-3}$ í **RMCNTL**.
- u_1^{air} og u_2^{air} eru vindar í x_1 og x_2 -áttir kerfisins og þá yfirleitt fyrir ofan jaðarlag lofthjúps (planetary boundary layer). Til einföldunar er þessi vindur oft hafður jafn þrýstivindinum (geostrophic wind) og er það góð nálgun fyrir stórkvarða (synoptic-scale) hreyfingu [Holton, 1992]. Slík nálgun er ekki gerð í þessu riti heldur yfirborðsvindar notaðir sem eru lesnir inn í skrána **RIMWND**.
- θ_{air} er sveigjuhorn (turning angle). Ef yfirborðsvindar eru notaðir er sveigjuhornið jafnt og núll. Í verkefni þessu er notast eingöngu við vinda í 10 metra hæð þannig að hornið er haft jafnt núlli, þ.e. $\theta_{air} = 0^\circ$ í **RMCNTL**.

Tilvist sveigjuhornsins θ_{air} er í aðalatriðum vegna tilvistar straumfræðilegra víxlverkana milli yfirborðs sjávar og lofthjúps. Þetta horn er ekki til umfjöllunar hér³.

Jafna fyrir skerspennu frá hafstraumum yfir á hafís er gefin sem [Neralla et al., 1988]:

$$\tau_i^{wat} = \rho_{wat} C_{wat} \sqrt{\tilde{u}_j^{wat} \tilde{u}_j^{wat}} \left(\tilde{u}_i^{wat} \cos(\theta_{wat}) + \varepsilon_{i3k} \tilde{u}_k^{wat} \sin(\theta_{wat}) \right) \quad (1.2.5)$$

Fyrir utan hafstraumagögn þá verða öll gildi jöfnu (1.2.5) að vera tímaóháð. eru þau lesin inn í líkanið frá textaskránni **RMCNTL**.

- ρ_{wat} er eðlismassi hafs. $\rho_{wat} = 1030 \text{ kg m}^{-3}$ í **RMCNTL**.
- $\tilde{u}_i^{wat} = \tilde{u}_i^{wat} = u_i^{wat} - v_i$ er hraðamismunur milli hafs og hafíss í x_1 og x_2 -átt kerfisins. Vigurinn $\tilde{u}^{wat} = u_i^{wat} \tilde{t}_i = u_1^{wat} \tilde{t}_1 + u_2^{wat} \tilde{t}_2$ er hafstraumur og þá yfirleitt neðan þess jaðarlags (turbulent boundary layer) sem myndast milli hafíss og sjávar. Þessi straumur er lesinn inn í skrána **RIMCUR**. Í raun ætti samsvarandi liður og $\tilde{u}_i^{wat} = u_i^{wat} - v_i$ að vera í jöfnu (1.2.4) en þar sem $u_i^{air} \gg v_i$, þarf þess ekki. Hafstraumurinn er hafður jafn meðalþrýstistraumi með tilliti til lengri tíma (long-term geostrophic current) [Häkkinen, 1990]. Jafna fyrir þrýstistrauma er [Pond & Pickard, 1983]:

$$v_i^{G-wat} = \varepsilon_{i3k} \frac{g}{f^c} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \Leftrightarrow \tilde{v}_i^{G-wat} = \tilde{t}_3 \times \frac{g}{f^c} \nabla \xi \quad (1.2.6)$$

- v_i^{G-wat} er þrýstistraumur hafs.

³ Lesandi getur séð slíka umfjöllun hjá Holton 1992, kafla 5.

Meðalþrýstistraumur með tilliti til lengri tíma verður þá

$$u_i^{wat} = \frac{1}{T} \int_T v_i^{G-wat} dt \quad (1.2.7)$$

- T er heildunartíminn.
- C_{wat} er skerspennustuðull (drag coefficient) og er hann breytilegur eftir því í hvaða hæð straumurinn er tekinn. $C_{wat} = 6 \cdot 10^{-3}$ í **RMCNTL**.
- θ_{wat} er sveigjuhorn (turning angle). $\theta_{wat} = 20^\circ$ í **RMCNTL** [Neralla, 1994].

Tilvist sveigjuhornsins θ_{wat} er í aðalatriðum vegna tilvistar straumfræðilegra víxlverkana milli yfirborðs hafíss (að neðanverðu) og þeirra hafstrauma er koma vegna halla hafflatar á yfirborði sjávar $\nabla \xi$ (sjá jöfnu 4.1.3). Þetta horn er ekki til umfjöllunar hér⁴.

1.2.4 Aflfræðileg víxlverkun

Nákvæmlega tiltekið þá lýsir spennutensorinn aflfræðilegri víxlverkun milli tiltekinnar samfelldrar efnisagnar og þeirra sem umlykja hana (hugtakið samfelld efnisögn er útskýrt í viðauka A). En þar sem unnið er með griddsellur í þessu verkefni í staðinn fyrir samfellda efnisögn, lýsir spennutensorinn aflfræðilegri víxlverkun milli allra samfelldra efnisagna inni í tiltekinni griddsellu og þeirra sem umlykja þessa griddsellu. Spennutensorinn sem lýsir þessari aflfræðilegu víxlverkun í hafísnum er leiddur út í kafla 4 þessa rits, en hann er nú gefinn sem:

$$\sigma_{ij} = -\frac{P}{2} \delta_{ij} + \zeta \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{2} \delta_{ij} \right) \quad (1.2.8)$$

- $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ er bjögunarhraðatensor (rate of deformation tensor).
- $\dot{\epsilon}_{ij} - (\dot{\epsilon}_{kk}/2)\delta_{ij}$ er skerbjögun án rúmmálsbreytinga í tveimur víddum.
- $\dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij}$ er rúmmálsbjögun án formbreytingar.
- ζ er rúmseigja hafíssins (sea-ice bulk viscosity).
- η er skerseigja hafíssins (sea-ice shear viscosity).
- $P = P(G_1, \dots, \dots, G_{TMAX}, x_p, t)$ er hafísstyrkur sem vinnur á móti pökkun (rafting) og reisingu (ridging).

$$P = P^* \sum_{l=1}^{TMAX} h_{l-1/2}^2 A_l \quad (1.2.9)$$

- P^* er empírískur fasti, sem breytt er eftir þörfum til að fá sem besta keyrslu. Mælt er með P^* sem $50000 N m^{-3}$ fyrir $e = 1$, en yfir $50000 N m^{-3}$ fyrir $e = 2$. $P^* = 70000 N m^{-3}$ og $e = 2$ í **RMCNTL**.

⁴ Lesandi getur séð slíka umfjöllun hjá Pond & Pickard 1983, kafla 9.

- e er kennitákn fyrir sporbaug Hiblers (sjá kafla 4.3).
- $A_I = A_I(G_I)$ er það flatarmál griddsellunnar sem er að yfirgefa þykktarflokkinn $h \in [h_{I-1}, h_I[$ vegna aflfræðilegra áhrifa (þ.e. áhrifa tengdum Ψ_I -fallinu).

Algoríþminn í líkaninu fyrir rúm- og skerseigju hafíssins er (sjá kafla 4):

$$\begin{aligned} & \text{Ef } \Delta > DMIN \text{ þá er } \Delta = \Delta(\dot{\epsilon}_{ij}), \text{ þar sem } \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^P : \\ & \zeta = \left\{ \frac{P}{2 \cdot \Delta(\dot{\epsilon}_{ij})} \right\} \wedge \eta = \left\{ \frac{P}{2 \cdot \Delta(\dot{\epsilon}_{ij}) \cdot e^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

• Ef $\Delta \leq DMIN$ þá er $\Delta = DMIN = \text{fasti}$, þar sem $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^v$:

$$\zeta = \left\{ \frac{P}{2 \cdot DMIN} \right\} \wedge \eta = \left\{ \frac{P}{2 \cdot DMIN \cdot e^2} \right\}$$

þar sem

$$\Delta = \left\{ \left((\dot{\epsilon}_{11}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^P)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) + \frac{4(\dot{\epsilon}_{12}^P)^2}{e^2} + 2\dot{\epsilon}_{11}^P \dot{\epsilon}_{22}^P \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (1.2.11)$$

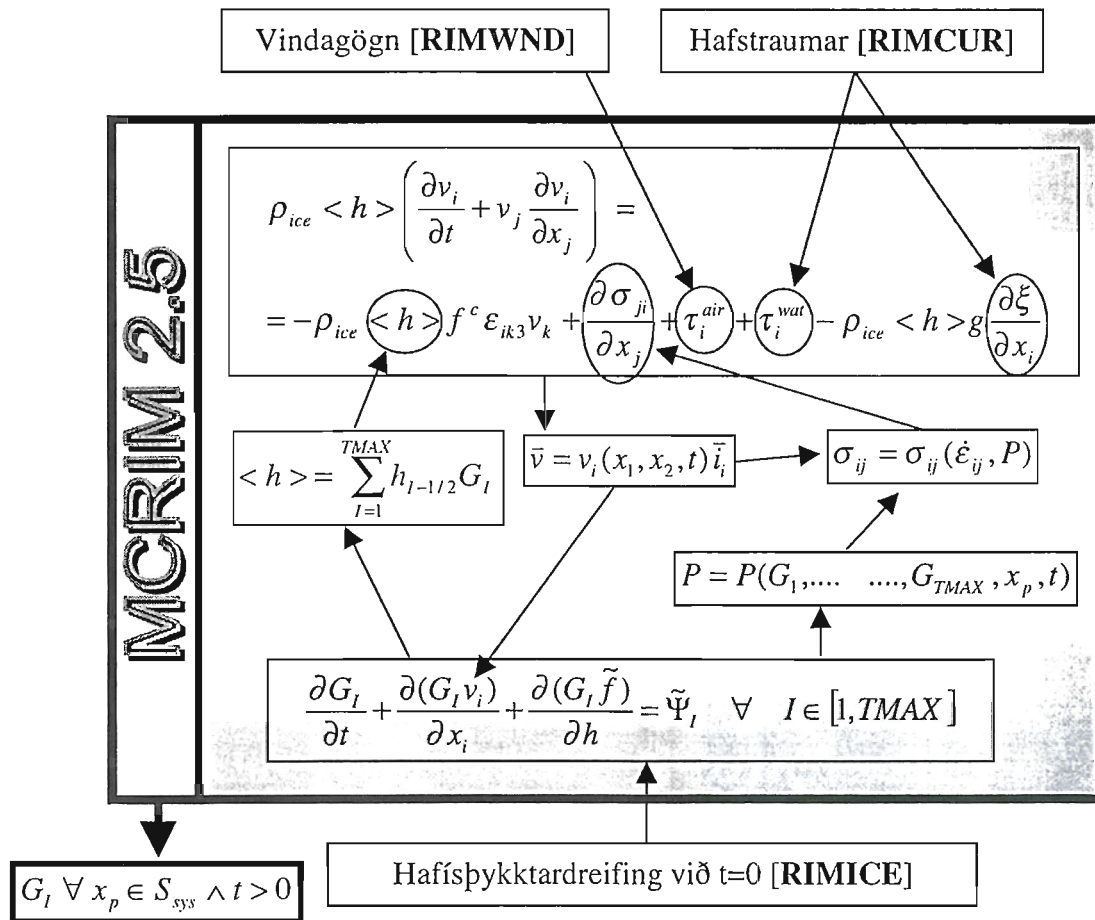
Líkanið notar Δ sem mælikvarða á bjögunarhraða í hverri griddsellu. Ástæðuna fyrir þessu má sjá í kafla 4. Ef Δ er minna en ákveðið gildi (kallað $DMIN$), er Δ settur sem fasti, jafnt og $DMIN$. Þetta leiðir til þess að fyrir fast P bregst spennutensorinn línulega við bjögunartensornum $\dot{\epsilon}_{ij}$ sem leiðir til þess að hafísinn í tilsvareandi griddsellu er í seigu ástandi en ekki flotkenndu. Ef Δ fer upp fyrir $DMIN$ fer hafísinn í flotkennt ástand. Ítarlegri umfjöllun má sjá í kafla 4: “Lýsing á spennuástandi hafíss”.

1.3 Samantekt: Líkanið MCRIM 2.5

Til þess að gera enn betur grein fyrir líkaninu er mynd 1.7 gerð. Þar eru sýnd tengslin milli jöfnu (1.1.15) og jöfnu (1.2.1).

Inn í líkanið fara vindagögn (í gegnum textaskrána RIMWND), hafstraumar (í gegnum textaskrána RIMCUR) og hafísþykktardreifing við $t=0$ (í gegnum textaskrána RIMICE). Síðastnefndi liðurinn er upphafskilyrði massavarðveislujöfnunnar (jöfnu (1.1.15)). Líkanið notar eina skrá til viðbótar sem nefnist RMCNTL en um þá skrá hefur verið rætt lítillega í kafla 1.2.3. Um hana verður einnig rætt í 2. og 5. kafla.

Öll jaðarskilyrði eru sett upp sjálfkrafa af líkaninu að öðru leyti en því að notandi tiltekur hvaða hluti jaðars er landjaðar og hvaða hluti er sjávarjaðar (samanber kafla 2.4). Upphafsskilyrðið fyrir hreyfijöfnuna eru einnig sett upp sjálfkrafa af líkaninu. Eina randskilyrðið sem líkannotandi þarf að huga að er hafísþykktardreifing við $t=0$.



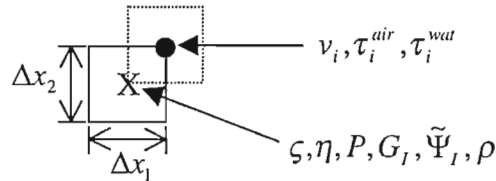
Mynd 1.7: Tengsl milli jafnanna í líkaninu MCRIM 2.5.

2. TÖLULEG FRAMSETNING

Hér er fjallað um tölulega brytjun þeirra jafna sem lýst er í kafla 1. Byrjað er á að lýsa uppsetningu reiknigridds. Síðan er farið í brytjunina fyrir massavarðveislujöfnuna og að lokum fyrir hreyfijöfnuna.

2.1 Uppsetning reiknigridds

Reiknigriddið er sett upp samkvæmt Arakawa B-griddi [Tremblay ,1997], en það er rúmfræðileg, hliðruð, tvöföld gridd-uppsetning (spatially staggered dual grid system) sem skiptir reiknigriddinu í tvo hluta: annars vegar í griddpunkta (grid points) og hins vegar í eiginlegar griddsellur (grid cells) sem verða kallaðar griddfletir í þessu riti til að forðast rugling. Þegar talað er um griddsellu í þessu riti er að jafnaði átt við griddflöt, en getur þó jafnframt vísað til griddpunkts. Mynd 2.1 sýnir þessa uppsetningu. Þar er skyggða svæðið griddflöturinn en svartí punkturinn er griddpunktur. Í griddpunkti eru stærðirnar $v_i, \tau_i^{air}, \tau_i^{wat}$ reiknaðar, en í griddfletinum eru stærðirnar $\zeta, \eta, P, G_I, \tilde{\Psi}_I, \rho$ reiknaðar:



Mynd 2.1: Griddflötur og griddpunktur.

- v_i er íshraði reiknaður samkvæmt jöfnu (1.2.1).
- τ_i^{air} er skerspennuliður frá lofthjúpi, sjá jöfnu (1.2.4).
- τ_i^{wat} er skerspennuliður vegna hafstrauma, sjá jöfnu (1.2.5)
- ζ er rúm-seigja hafíssins, sjá jöfnu (1.2.10).
- η er sker-seigja hafíssins, sjá jöfnu (1.2.10).
- P er styrkur íssins, sjá jöfnu (1.2.9).
- G_I er þykktardreifingarfallið reiknað samkvæmt jöfnu (1.1.15).
- $\tilde{\Psi}_I$ er endurdreifingarfallið, sjá jöfnu (1.1.15).
- $\rho(x_i, t)$ er eðlismassi hafíss í hverjum griddfleti, samkvæmt jöfnu (1.2.2).

Eins og mynd 2.1 sýnir þá er í líkaninu notuð ferningslaga griddsella, þ.e. $\Delta x_1 = \Delta x_2$. Til hagræðingar eru jafn margir griddpunktar og griddfletir í líkaninu, bæði í x_1 og x_2 átt. Þetta fyrirkomulag setur fyrstu línu og fyrsta dálk út fyrir hinn raunverulega jaðar kerfisins, því að jaðarinn er dreginn um griddpunkta. Mynd 2.2 sýnir þetta fyrirkomulag en þar er skyggða svæðið hið eiginlega svæði kerfisins.

Fyrir griddpunkt gildir:

$$x_1 = \Delta x_1 \cdot (X - 1) \quad \forall \quad X \in \{1, 2, 3, \dots, NX\} \quad (2.1.1)$$

$$x_2 = \Delta x_2 \cdot (Y - 1) \quad \forall \quad Y \in \{1, 2, 3, \dots, NY\} \quad (2.1.2)$$

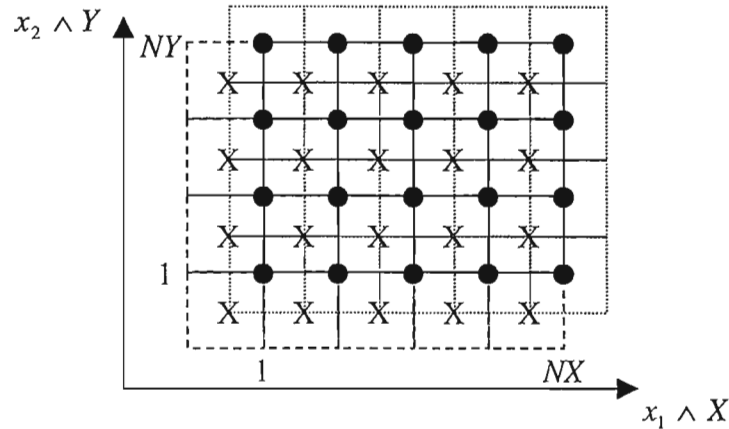
Fyrir griddflöt gildir:

$$x_1 = \Delta x_1 \cdot (X - 1/2) \quad \forall \quad X \in \{1, 2, 3, \dots, NX\} \quad (2.1.3)$$

$$x_2 = \Delta x_2 \cdot (Y - 1/2) \quad \forall \quad Y \in \{1, 2, 3, \dots, NY\} \quad (2.1.4)$$

Fyrir tímaskref gildir:

$$t = \Delta t \cdot K \quad \forall \quad K \in \{0,1,2,3,\dots, NT\} \quad (2.1.5)$$



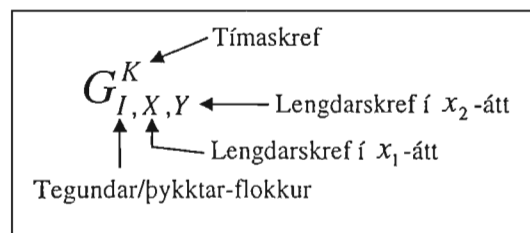
Mynd 2.2: Skyggða svæðið er svæði kerfisins.

2.2 Brytjun massavarðveislujöfnunnar

Við hægri hlið jöfnu (1.1.15) er bætt við tveimur dreifiliðum: harmónskum (harmonics) og tvíharmónskum (biharmonics) dreifilið (diffusion), þannig að nú verður hún:

$$\underbrace{\frac{\partial G_I}{\partial t}}_A + \underbrace{\frac{\partial(G_I v_i)}{\partial x_i}}_B + \underbrace{\frac{\partial(G_I \tilde{f})}{\partial h}}_C = \underbrace{\tilde{\Psi}_I}_D + \underbrace{D_1 \frac{\partial^2 G_I}{\partial x_j \partial x_j}}_E + \underbrace{D_2 \frac{\partial^4 G_I}{\partial x_j^2 \partial x_j^2}}_F \quad (2.2.6)$$

þar sem D_1 og D_2 eru dreifistuðlar (diffusion coefficients). Líkannotandi ákvarðar ekki þessi gildi. Þau eru skilgreind í líkaninu. Þó að einhver raunveruleg dreifing sé til staðar í hafísnum vegna tilviljunarkenndra slembiáhrifa (random effects), eru þessir tveir dreifiliðir (liður E og F í jöfnu (2.2.6)) hreint tölulegt hjálpartæki, notaðir til að draga úr sveiflum í kerfinu [Hibler III ,1979].



Mynd 2.3: Lýsing á rithætti við númeriska brytjun.

Mynd 2.3 sýnir hvernig uppsetning vísa er fyrir eftirfarandi umfjöllun (sjá einnig mynd 2.5): Jafna (2.2.6) er brytjuð með tilliti til tíma á eftirfarandi hátt⁵:

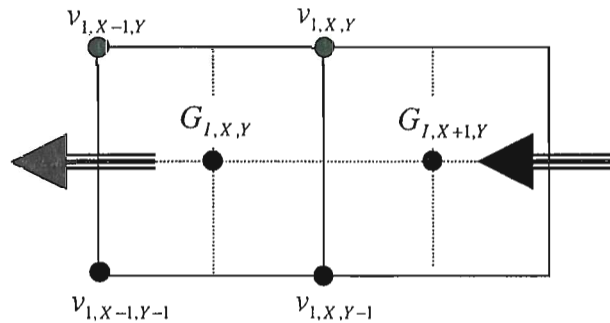
$$\frac{G_{I,X,Y}^{K+3/2} - G_{I,X,Y}^{K+1/2}}{\Delta t} = \hat{F}(G_{I,X,Y}^{K+1}, v_{i,X,Y}^{K+1}, f_{X,Y}^{K+1}, \tilde{\Psi}_{I,X,Y}^{K+1}) \quad (2.2.7)$$

⁵ Þessi jafna er ekki skrefuð eitt skref áfram fyrr en einnig er búið er að skrefa áfram eitt skref með hreyfi-jöfnunni, samanber lýsingu hér á eftir.

\hat{F} er fall sem lýsir öðrum liðum jöfnu (2.2.6). Eins og ofangreind jafna sýnir þá er $G_i^{K+3/2}$ reiknað út frá $G_i^{K+1/2}$, G_i^{K+1} , v_1^{K+1} , v_2^{K+1} , f^{K+1} og $\tilde{\Psi}^{K+1}$. Þar sem G_i^{K+1} er óþekkt, er fyrst gert ráð fyrir að $G_i^{K+1} = G_i^{K+1/2}$ sem gefur ágískað gildi á $G_i^{K+3/2}$. G_i^{K+1} er síðan nálgáð með $G_i^{K+1} = (G_i^{K+1/2} + G_i^{K+3/2})/2$ sem gefur nýja og betri nálgun á $G_i^{K+3/2}$.

Áður en aðstremishluti jöfnu (2.2.6) (liður B) er nálgáður, er hraðinn í hverjum griddpunkti umhverfis tilsvareandi griddflöt athugaður. Þetta er gert þar sem í líkaninu er notuð svonefnd uppstreymisnálgun (upwind differencing) [Fletcher, 1991]: T.d. ef $\bar{v} = v_i \bar{l}_i = -v_1 \bar{l}_1 \wedge v_1 > 0$, er aðstremið í punkti (X, Y) reiknað samkvæmt:

$$\left. \frac{\partial(G_i v_i)}{\partial x_i} \right|^K = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{v_{1,X,Y}^K + v_{1,X,Y-1}^K}{2} \cdot G_{I,X+1,Y}^K - \frac{v_{1,X-1,Y}^K + v_{1,X-1,Y-1}^K}{2} \cdot G_{I,X,Y}^K \right] \quad (2.2.8)$$



Mynd 2.4: "Upwind differencing". Örvagnar benda í hreyfiátt íssins.

Ef $\bar{v} = v_i \bar{l}_i = v_1 \bar{l}_1 \wedge v_1 > 0$, er aðstremið í punkti (X, Y)

$$\left. \frac{\partial(G_i v_i)}{\partial x_i} \right|^K = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{v_{1,X,Y}^K + v_{1,X,Y-1}^K}{2} \cdot G_{I,X,Y}^K - \frac{v_{1,X-1,Y}^K + v_{1,X-1,Y-1}^K}{2} \cdot G_{I,X-1,Y}^K \right] \quad (2.2.9)$$

Samsvarandi algoritmi er notaður fyrir lið C í jöfnu (2.2.6) eftir því hvort ísþykktin er að stækka eða minnka vegna varmafræðilegra áhrifa. En þar sem þessi liður er ekki notaður í þessu verkefni verður ekki farið út í nánari lýsingu á honum. Markmiðið með uppstreymisnálgunum er það sama og með viðbótardreifiliðum, þ.e. að dempa hugsanlegar númerískar sveiflur. Loks er ástæða til þess að benda á að sé margfaldað í gegnum jöfnur (2.2.7) til (2.2.9) með Δx^2 má líta á þær sem nálgun fyrir jöfnu (3.1.19) fremur en jöfnu (1.1.1). Því má líka túlka það svo að MCRIM 2.5 byggi í raun á jöfnu (3.1.19) fremur en jöfnu (1.1.1).

2.3 Brytjun hreyfijöfnunnar

Eftir innlestur allra upphafs- og randskilyrða, eðlisfræðilegra fasta, MASK-sins (sjá kafla 2.4) og annara nauðsynlegra byrjunarstíka (sem eru lesin frá textaskránum RMCNTL og RIMICE)

byrjar líkanið að reikna út upphafsísstyrk P fyrir allar griddsellur í kerfinu samkvæmt (sjá kafla 1.2.4 og 4.3):

$$P = P^* \sum_{l=1}^{TMAX} h_{l-1/2}^2 A_l \quad (2.2.10)$$

Í líkaninu er P^* meðhöndlaður sem empírískur fasti sem er breytt eftir þörfum til að fá sem besta keyrslu. Mælt er með P^* sem $50000 N/m^3$ fyrir $e=1$, en yfir $50000 N/m^3$ fyrir $e=2$. e er kennitákn fyrir sporbaug Hiblers (sjá kafla 4.3). A_l er það flatarmál griddsellunnar sem er að yfirgefa þykktarflokkinn $h \in [h_{l-1}, h_l[$ vegna aflfræðilegra áhrifa (sjá kafla 1.2.4). Þar á eftir er reiknaður ágiskaður upphafshraði íssins í líkaninu samkvæmt einföldu jafnvægi milli τ_i^{air} og τ_i^{wat} :

$$\tau_i^{air} + \tau_i^{wat} = 0 \quad (2.2.11)$$

Hraðinn sem er fenginn úr þessari jöfnu er notaður sem byrjunargildi á ítrekun fyrir tímaóháðu hreyfijöfnuna við $t=0$: (sjá jöfnu (1.2.3)):

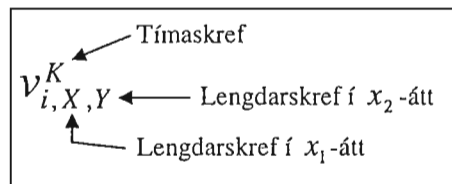
$$0 = -\rho f^c \varepsilon_{ik3} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$$

Þessari ítrekun er haldið áfram þar til mismunur á milli eins skrefs og þess næsta er orðinn minni en ákveðið gildi eða fjöldi ítrekana er kominn að ákveðnu marki. Niðurstaðan er notuð sem upphafshraði fyrir tímaháðu jöfnuna.

Hreyfijafnan sem notuð er í líkaninu er sett fram í kafla 1.2.1 (jafna (1.2.1)) og er hún endurtekin hér:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho f^c \varepsilon_{ik3} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad (2.2.12)$$

Vegna aðstreymishluta hröðunarliðsins í þessari jöfnu og vegna $\partial \sigma_{ji} / \partial x_j$ -liðsins þar, er þessi jafna ólínuleg. Einfaldast er að leysa jöfnuna með beinni (explicit) brytjun, en slíkt mundi takmarka stærð tímaskrefs Δt vegna stöðugleikavandamála [Fletcher, 1990]. Fólgin aðferð (Implicit scheme) leiðir hins vegar til þess að leysa þarf ólínulegt jöfnuhneppi á hverju tímaskrefi í öllum óþekktu hraðagildunum. Svokölluð ágiskunarleiðrétting (predictor-corrector) er notuð til að fá nothæfa nálgunarlausn á þessu jöfnuhneppi á reiknislega hagkvæman hátt. Þessi aðferð giskar á og leiðréttir skref sem eru tekin á línulegri útfærslu á ofangreindri jöfnu.



Mynd 2.5: Lýsing á rithætti við númeríska brytjun.

Mynd 5.5 lýsir þeim rithætti sem notaður er í eftirfarandi umfjöllun: Til þess að geta reiknað v_i^{K+1} út frá v_i^K er hálf títmaskref $v_i^{K+1/2}$ reiknað með því að gera ráð fyrir $v_i^{K+1/2} = v_i^K$:

Ágiskunarskrefið (predictor step) til lausnar á $v_i^{K+1/2}$ er:

$$\rho \left\{ \left(\frac{v_i^{K+1/2} - v_i^K}{\Delta t/2} \right) + v_1^K \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_1} + v_2^K \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_2} \right\} = \overline{f'_i(v_i, \zeta^K, \eta^K, \Gamma^K)} + f_i''^K \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_1} = \frac{\theta(v_{i,X+1,Y}^{K+1/2} - v_{i,X-1,Y}^{K+1/2}) + (\theta - 1) \cdot (v_{i,X+1,Y}^K - v_{i,X-1,Y}^K)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_2} = \frac{\theta(v_{i,X,Y+1}^{K+1/2} - v_{i,X,Y-1}^{K+1/2}) + (\theta - 1) \cdot (v_{i,X,Y+1}^K - v_{i,X,Y-1}^K)}{2\Delta y}$$

$$\overline{f'_i(v_i, \zeta^K, \eta^K, \Gamma^K)} =$$

$$= \theta \left(-\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k^{K+1/2} + \tau_i^{ice1, K+1/2} + \frac{\partial \Gamma_{ji}^K(\zeta^K, \eta^K)}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ (\theta - 1) \left(-\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k^K + \tau_i^{ice1, K} + \frac{\partial \Gamma_{ji}^K(\zeta^K, \eta^K)}{\partial x_j} \right)$$

Leiðréttingarskrefið (corrector step) til lausnar á v_i^{K+1} er:

$$\rho \left\{ \left(\frac{v_i^{K+1} - v_i^K}{\Delta t} \right) + v_1^{K+1/2} \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_1} + v_2^{K+1/2} \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_2} \right\} = \overline{f'_i(v_i, \zeta^{K+1/2}, \eta^{K+1/2}, \Gamma^{K+1/2})} + f_i''^{K+1/2} \quad (2.2.14)$$

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_1} = \frac{\theta(v_{i,X+1,Y}^{K+1} - v_{i,X-1,Y}^{K+1}) + (\theta - 1) \cdot (v_{i,X+1,Y}^K - v_{i,X-1,Y}^K)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_2} = \frac{\theta(v_{i,X,Y+1}^{K+1} - v_{i,X,Y-1}^{K+1}) + (\theta - 1) \cdot (v_{i,X,Y+1}^K - v_{i,X,Y-1}^K)}{2\Delta y}$$

$$\overline{f'_i(v_i, \zeta^{K+1/2}, \eta^{K+1/2}, \Gamma^{K+1/2})} =$$

$$= \theta \left(-\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k^{K+1} + \tau_i^{ice1, K+1} + \frac{\partial \Gamma_{ji}^{K+1/2}(\zeta^{K+1/2}, \eta^{K+1/2})}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ (\theta - 1) \left(-\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k^K + \tau_i^{ice1, K} + \frac{\partial \Gamma_{ji}^{K+1/2}(\zeta^{K+1/2}, \eta^{K+1/2})}{\partial x_j} \right)$$

Fyrir báðar jöfnur gildir:

$$f_i''^K = \tau_i^{air} + \tau_i^{ice2} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial P^K}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_{ij} \equiv \sigma_{ij} + P \delta_{ij} / 2$$

$$\tau_i^{ice1, K} = \rho_{wat} C_{wat} \sqrt{v_j^K v_j^K} \left(v_i^K \cos(\theta_{wat}) + \varepsilon_{ik3} v_k^K \sin(\theta_{wat}) \right)$$

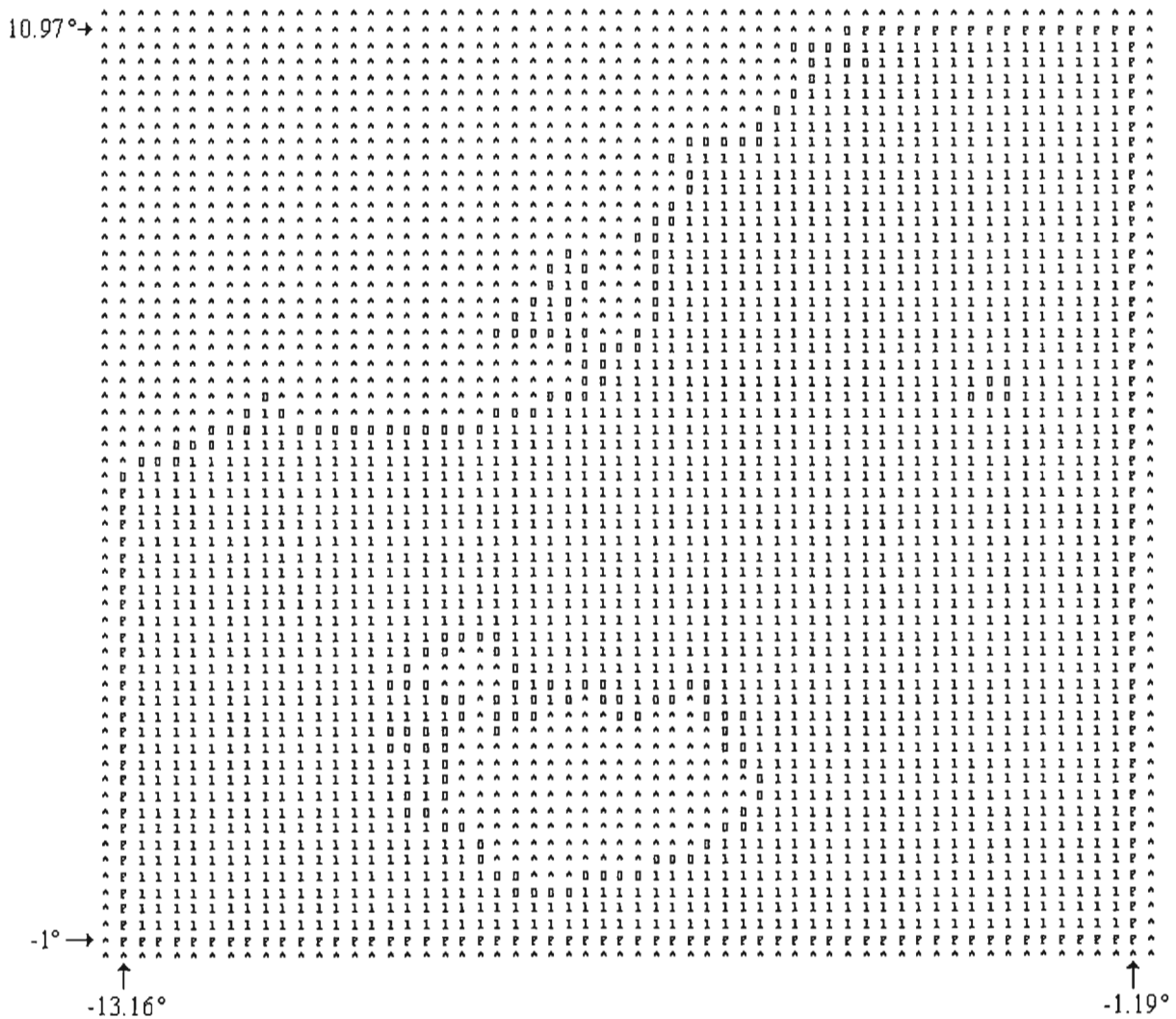
$$\tau_i^{ice2} = \rho_{wat} C_{wat} \sqrt{u_j^{wat} u_j^{wat}} \left(u_i^{wat} \cos(\theta_{wat}) + \varepsilon_{ik3} u_i^{wat} \sin(\theta_{wat}) \right)$$

$$\tau_i^{air} = \rho_{air} C_{air} \sqrt{u_j^{air} u_j^{air}} \left(u_i^{air} \cos(\theta_{air}) + \varepsilon_{ik3} u_i^{air} \sin(\theta_{air}) \right)$$

Öll gildi í ofangreindum jöfnum eru í samræmi við kafla 1.2: “Hreyfijafna líkansins”. Hér er $\tau_i^{wat} = \tau_i^{ice2} - \tau_i^{ice1}$, samanber jöfnu (1.2.5). Í báðum skrefum þarf nú að leysa línulegt jöfnuhneppi í öllum óþekktu hraðagildunum ef $\theta > 1$. Í líkaninu eru þessi jöfnuhneppi leyst með ítrekunaraðferð (relaxation). Þetta eru þeir reikningar sem taka lengstan tíma. Líkannotandi getur valið $\theta \in [0,1]$ að vild (θ -gildið er látið í skrána RMCNTL). Í upplýsingabæklingi sem fylgir þessu líkani er mælt með $\theta = 1$ til að viðhalda sem mestum stöðugleika í keyrslu og er það gert í þessu verkefni, þ.e. $\theta = 1$ í RMCNTL.

2.4 Upsetning jaðarskilyrða

Orðið MASK er nafn yfir fylki sem lýsir meðal annars því jaðarástandi sem gildir í kerfinu og þannig óbeint legu þess. Þetta fylki er lesið inn í líkanið frá textaskránni RMCNTL. Mynd 2.6 sýnir “MASK-ið” fyrir líkanið og sést þar hver jaðarhnitin eru í kerfinu. Upplausnin er $0,21^\circ \times 0,21^\circ$ eða um $23,37 \text{ km} \times 23,37 \text{ km}$ (sjá kafla 5). Í hverju staki fylkisins er annaðhvort **1**, **0**, * eða **F** og er verið að vísa í rúmfræðilega staðsetningu fyrir tilsvareandi griddpunkt (og þannig óbeint í tilsvareandi griddflöt eins og mynd 2.2 og jöfnur (2.1.1) til (2.1.4) sýna).



Mynd 2.6: Fylkið MASK gefur líkaninu upplýsingar um hvar og hvers konar útreikninga skal framkvæma.

MASK: Jaðarskilyrði:

- “F” : F-punktur er hafður á jaðri kerfisins þar sem er opið haf (þ.e. á ∂S_{vat} , samanber kafla 1.1.5). Í slíkum punkti gildir Neumann skilyrði bæði fyrir hreyfijöfnuna (sjá kafla 1.2.2) og massavarðveislujöfnuna (sjá kafla 1.1.5): $\partial v_i / \partial x_j = 0 \wedge \partial G_l / \partial x_j = 0$. Í slíkum punkti er einnig haft spennulaust ástand. Með spennulausu ástandi er átt við að $\sigma_{ij} = 0$. Það er fengið með því að láta $P = \zeta = \eta = 0$ (sjá jöfnur (1.2.8) til (1.2.10)).
- “0” : 0-punktur er hafður á landjaðri (með öðrum orðum, á strönd landsvæðis). Í slíkum punkti gildir Dirichlet skilyrði bæði fyrir hreyfijöfnuna (sjá kafla 1.2.2) og massavarðveislujöfnuna (sjá kafla 1.1.5): $v_i = 0 \wedge G_l = 0$. Skilyrðið $G_l = 0$ er haft á griddflötinn fyrir innan 0-jaðarinn (landsvæðamegin við 0-jaðarinn), en skilyrðið $v_i = 0$ gildir í 0-punktinum.

MASK: Aðrar upplýsingar fyrir líkanið:

- “1” :Útreikningar á íshraða, og ísflæði eiga sér stað (jöfnur (1.2.1) og (1.1.15)).
- “*”:Engir útreikningar eiga sér stað. Þetta tilfelli á við inni í landmassa. Einnig eru þessi tákni við enda MASK-fylkisins, en þeir eru utan við endamörk kerfisins. Ástæðan fyrir þessu fyrirkomulagi er tæknileg og óskyld umræðunni hér.

3. ÚTLEIÐSLA Á JÖFNU THORNDIKES

Í þessum kafla er farið í gegnum útleiðslu á jöfnu Thorndikes (jöfnu (1.1.1)). Þessi útleiðsla er ekki eins og Thorndike gerir hana. Höfundur hefur ákveðið að fara aðra jafngilda leið sem byggir meira á hugmyndafræði samfelldra efna. Í viðauka A þessa rits er þessari hugmyndafræði lýst og verður vitnað í þann viðauka eftir þörfum hér í kafla 3. Vissulega eru til aðrar og jafngildar leiðir fyrir útleiðslu á þessari jöfnu. Áhugavert væri að skoða hér slíkar útleiðslur, en umfang verkefnisins leyfir það ekki.

3.1 Hafísinn sem samfellt efni

Í hafíslíkönunum er hafísinn yfirleitt meðhöndlaður sem tvívítt samfellt efni, þannig að í staðinn fyrir að tala um rúmmál samfelldra efnisagna δV (skilgreiningu á samfelldri efnisögn má sjá í viðauka A) er talað um flatarmál hennar δR í sama samhengi. Í staðinn fyrir að tala um efnisrúmmál $V(t)$ (skilgreiningin á efnisrúmmáli má sjá í viðauka A) er talað um efnisflatarmál $R(t)$.

Mismunurinn á samfelldri efnisögn og griddsellu er útskýrður fyrir neðan jöfnu (3.1.19) og þá í samhengi við fyrri texta þar. Þessi útskýring er endurtekin hér þannig að lesandi geti aðeins byrjað að átta sig betur á þessum mismun. Mismunurinn er tvenns konar.

- 1) Æskilegt er að stærð samfelldrar efnisagnar sé töluvert minni en stærð griddsellunnar svo að G_r -fallið geti hegðað sér sem samfellt fall í tíma og rúmi (sjá athugasemdir fyrir neðan jöfnu (3.1.16)). Þetta skilyrði er ekki nauðsynleg forsenda fyrir notkun á jöfnu (3.1.19) því heildi af ósamfelldu falli er vel skilgreint. Hins vegar ef beitt er setningu Gauss og síðan lemmu duBois-Reymonds á þessa jöfnu, fæst jafna (3.1.13). Þá verður þetta skilyrði að vera til staðar svo að afleiðurnar í jöfnunni verði skilgreindar.
- 2) Samfelld efnisögn samanstendur alltaf af sama efninu (þetta er grundvallarskilgreining á þessari ögn og hana má sjá í viðaukum A og B) en griddsellan gerir það ekki því hún er kyrr og flæða samfelldar agnir gegnum hana.

Í samræmi við hugmyndafræði samfelldra efna (sjá viðauka A) verður stærð (flatarmál) agnar kerfisins δR að vera þannig að meðalísþykkt agnar breytist um það bil sem samfellt fall frá einni ögn yfir í þá næstu. Ástæðan fyrir því að talað er um “meðalísþykkt” í staðinn fyrir “sjálfa ísþykktina” er sú, að hugmyndafræði samfelldra efna byggir á því að finna breytingar á milli agna en ekki inni í þeim. Því er tilsvarendi breytistærð meðhöndluð sem fasti inni í ögninni (sem er þá meðalþykkt hennar í þessu tilfelli). Í því líkani sem unnið er með (MCRIM 2.5) er ísþykktin sjálf h ekki meðhöndluð sem háða stærðin, heldur ákveðið þykktardreifingarfall (thickness distribution) agnarinnar, $\tilde{g}(x_p, h, t)$. Þetta fall er með eininguna lengd⁻¹ og lýsir $\tilde{g}(x_p, h, t)dh$ hve hlutfallslega stór hluti af flatarmáli agnarinnar hefur ísþykktina h til $h + dh$. Eiginleikar $\tilde{g}(x_p, h, t)$ verða fyrst og fremst að vera eftirfarandi:

1. Væntigildið af ísþykktinni $\langle h(x_p, t) \rangle$ í hverjum punkti x_p og á hverju augnabliki t , verður að vera hin raunverulega þykktardreifing kerfisins táknað með $H(x_p, t)$:

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \int_0^{\infty} h \tilde{g}(x_p, h, t) dh = H(x_p, t) \quad (3.1.1a)$$

2. Líkurnar á því að tiltekin ögn hafi ísþykkt $h \in [0, h_{\max}[$ verður að vera einn:

$$\int_0^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh = \int_0^{\infty} \tilde{g}(x_p, h, t) dh = 1 \quad (3.1.1b)$$

3.

$$\int_{h_1}^{h_2} \tilde{g}(x_p, h, t) dh = \begin{cases} 1 & \text{ef } h \in [h_1, h_2[\\ 0 & \text{ef } h \notin [h_1, h_2[\end{cases} \quad (3.1.1c)$$

Það fall sem uppfyllir ofangreindar kröfur er Dirac deltafall:

$$\tilde{g}(x_p, h, t) \equiv \delta(h - H(x_p, t))$$

þar sem $0 \leq H(x_p, t) < h_{\max}$ (h_{\max} er mesta mögulega ísþykkt kerfis). Lesanda kann að þykja ankannalegt að höfundur skuli nota dreififall sem lýsingu á þykktardreifingarfallinu. *En fallið er valið út frá hegðun þessar heildun á sér stað.* Ef jafna (2.1.6) er summuð yfir allar þær agnir sem hafa hnitin $x_p \in R(t)$, þá fæst:

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \sum_{x_p \in R} \left\{ \int_0^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh \right\} \Delta R = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \sum_{x_p \in R} \Delta R = \int_R dR = R \quad (3.1.2)$$

þar sem $R(t)$ er efnisflatarmál með meðal(í rúmi)-augnabliks(í tíma)-hnitin:

$$\hat{x}_p = \frac{\int_{R(t)} x_p dR}{\int_{R(t)} dR} \quad (3.1.3)$$

og markgildið svarar til þess að Riemann summu sé breytt í heildi.

Út frá jöfnu (3.1.1), sést að

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \sum_{x_p \in R(t)} \left\{ \int_{h_1}^{h_2} \tilde{g}(x_p, h, t) dh \right\} \Delta R &= \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \sum_{x_p \in R(t)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ ef } h \in [h_1, h_2[\\ 0 \text{ ef } h \notin [h_1, h_2[\end{array} \right\} \Delta R = \\ &= A_R(h_1, h_2, t) = \int_{R(t)} \int_{h_1}^{h_2} \delta(h - H(x_p, t)) dh dR = \int_{h_1}^{h_2} \int_{R(t)} \delta(h - H(x_p, t)) dR dh \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Ofangreind skipting

$$\int_{R(t)} \int_{h_1}^{h_2} \dots dh dR \rightarrow \int_{h_1}^{h_2} \int_{R(t)} \dots dR dh$$

er möguleg þar sem h_1 og h_2 eru ákveðin tölugildi og $R \neq R(h)$. Stærðin $A_R(h_1, h_2, t)$ er það flatarmál hafíss með þykktina á bilinu frá h_1 til h_2 í efnisflatarmálinu $R(t)$, sem fylgt er eftir á hreyfingu. Nú sést að:

$$\int_{h_1}^{h_2} g_R(h, t) dh = \frac{A_R(h_1, h_2, t)}{R} \quad (3.1.5)$$

Fallið g_R er nefnt þykktardreifing (thickness distribution) efnisflatar $R(t)$ [Thorndike et. al. ,1975], sem fylgt er eftir á hreyfingu:

$$g_R(h,t) \equiv \frac{1}{R} \int_R \tilde{g}(x_p, h, t) dR \quad (3.1.6)$$

Dæmi:

Ef efnisflatarmálið R inniheldur flatarmálið \hat{A} af fastri íspykkt \hat{h} , þá fæst:

$$\begin{aligned} g_R(h,t) &= \frac{1}{R} \int_R \delta(h - H(x_p, t)) dR = \frac{1}{R} \left\{ \int_{\hat{A}} \delta(h - \hat{h}) dR + \int_{R-\hat{A}} \delta(h - H(x_p, t)) dR \right\} = \\ &= \frac{\delta(h - \hat{h})}{R} \int_{\hat{A}} dR + \frac{1}{R} \int_{R-\hat{A}} \delta(h - H(x_p, t)) dR = \frac{\hat{A}}{R} \delta(h - \hat{h}) + g_{R-\hat{A}}(h, t) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

sem gefur þá

$$\int_{\hat{h}^-}^{\hat{h}^+} g_R(h, t) dh = \frac{\hat{A}}{R} \quad (3.1.8)$$

Ástæðan fyrir ofangreindu dæmi er að réttlæta notkun dreififallsins enn frekar. Frá jöfnu (3.1.5) og (3.1.6) fæst:

$$\frac{1}{R} \int_R \int_0^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh = \frac{A_R(0, h_{\max}, t)}{R} = \frac{R}{R} = 1$$

eða með öðrum orðum:

$$\int_R \int_0^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh dR = R \quad (3.1.9)$$

sem er jafngild jöfnu (3.1.2). Diffrun ofangreindrar jöfnu með tilliti til tíma gefur :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_R \int_0^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh dR \right\} &= \frac{d}{dt} R = \frac{d}{dt} \int_R dR \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \int_R \left\{ \int_0^{h_1} \tilde{g}(x_p, h, t) dh + \dots + \int_{h_{l-1}}^{h_l} \tilde{g}(x_p, h, t) dh + \dots + \int_{h_{\max-1}}^{h_{\max}} \tilde{g}(x_p, h, t) dh \right\} dR &= \frac{d}{dt} \int_R dR \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_R \{G_1(x_p, t) + \dots + G_l(x_p, t) + \dots + G_{\max}(x_p, t)\} dR &= \frac{d}{dt} \int_R dR \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_R G_l(x_p, t) dR &= \frac{d}{dt} \int_R \left\{ - \sum_{J \neq l} G_J(x_p, t) \right\} dR + \frac{d}{dt} \int_R dR \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_R G_l(x_p, t) dR &= \frac{d}{dt} \int_R \left\{ 1 - \sum_{J \neq l} G_J(x_p, t) \right\} dR \equiv \frac{d}{dt} \int_R \varphi_l(x_p, t) dR \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Hér er íspykktin h_{\max} , flokkuð niður í MAX bil (í líkaninu MCRIM 2.5 er þykktin $h \in [0, h_1[$ meðhöndluð sem opið haf og ískrap (sjá kafla 1.1.4)). Fallið:

$$G_I(x_p, t) \equiv \int_{h_{I-1}}^{h_I} \tilde{g}(x_p, h, t) dh = \int_{h_{I-1}}^{h_I} \delta(h - H(x_p, t)) dh \quad (3.1.11)$$

nefnist uppsafnað þykktardreifingarfall (cumulative thickness distribution) agnarinnar δR og þar sem ögnin getur aðeins haft eina þykkt, þá er það 0-1 fall: Ef tilsvarendi ögn er með (meðal) þykktina $h \in [h_{I-1}, h_I[$, þá er $G_I = 1$ og ef $h \notin [h_{I-1}, h_I[$, þá er $G_I = 0$. Einnig ef $G_I = 1$, þá er $G_{J \neq I} = 0 \forall J \in [1, MAX]$, þannig að almennt gildir eftirfarandi fyrir sérhverja ögn:

$$\sum_{J \neq I} G_J(x_p, t) = (1 \vee 0) \quad \wedge \quad \sum_{J=1}^{\max} G_J(x_p, t) = 1 \quad (3.1.12)$$

Með notkun setningar Leibniz verður síðasta jafnan í jöfnusafni (3.1.10):

$$\int_{R(t)} \frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} dR + \underbrace{\int_{\partial R(t)} G_I(x_p, t) (v_i(x_p, t) n_i) dS}_A = \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \varphi_I(x_p, t) dR \quad (3.1.13)$$

Setning Gauss og lemmu duBois-Reynolds gefur síðan

$$\frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial (G_I(x_p, t) v_i(x_p, t))}{\partial x_i} = \Psi_I(x_p, t) \quad \forall I \in [1, MAX] \quad (3.1.14)$$

þar sem

$$\Psi_I(x_p, t) = \frac{\partial \varphi_I(x_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi_I(x_p, t) v_q(x_p, t))}{\partial x_q} \quad (3.1.15)$$

er kallað endurdreifingarfall (redistribution function) og lýsir það þeim breytingum á G_I inni í ögninni vegna aflfræðilegra áhrifa sem eru nefndar reising (ridging) og pökkun (rafting). Til dæmis ef ísþykkt agnar δR er að hverfa úr menginu $h \in [h_{I-1}, h_I[$ yfir í $h \in [h_I, h_{I+1}[$ vegna þessara aflfræðilegu þátta þannig að $dG_{I+1}/dt > 0$, þá fæst frá jöfnu (3.1.15) og (3.1.12)⁶:

$$\Psi_I \propto - \frac{d \sum_{J \neq I} G_J(x_p, t)}{dt} = - \frac{dG_{I+1}(x_p, t)}{dt} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dG_I(x_p, t)}{dt} \propto \Psi_I < 0 \quad (3.1.16)$$

Ítarlegri umfjöllun um endurdreifingarfallið má sjá í [Thorndike et. al. ,1975] og í [Reimer et. al. ,1980].

Afleiðurnar í jöfnu (3.1.14) eru ekki til, því eins og áður sagði þá er G_I , 0-1 fall og jafnan er því ekki gild (samanber umræðu í viðauka A). En þetta er í raun ekki neitt vandamál út af eftirfarandi ástæðum:

- Stærð agnarinnar gefur hina mestu eðlisfræðilegu upplausn sem raunverulega kerfið hefur upp á að bjóða.

⁶ Þar sem talað er um ögn en ekki Eulerískan punkt þá er jöfnu (A.6), frá viðauka A, einnig beitt.

- Stærð griddsellanna gefur þá upplausn sem boðið er upp á í því líkani sem nálgar þetta raunverulega kerfi.
- Í hvert sinn sem við beitum lemmu duBois-Reynolds, gildir tilsvareandi hlutfleiðujafna ekki fyrir sjálfa ögnina heldur samansafn agna sem eru í griddsellunni, því stærð griddsellunar gefur þá upplausn sem unnið er með.

Fallið G_i er því ekki lengur 0-1 fall heldur prósentufall sem segir okkur hve mörg prósent af flatarmáli griddsellunnar hafi ísþykktina $h \in [h_{i-1}, h_i[$ og getur því farið að hegða sér sem samfelld fall í tíma og rúmi, sem leiðir aftur á móti til þess möguleika að jafna (3.1.14) er gild. Eðli Ψ_i -fallsins breytist þá einnig frá því að lýsa þökkun/reisingu einnar agnar yfir í það sem gildir fyrir allar þær agnir sem eru inni í griddsellunni. Í framsetningu Eulers (sjá viðauka B), þar sem athygli beinist að núverandi hnitum agnar í stað upphafshnita hennar, þá lýsir Ψ_i breytingum á G_i sem verða vegna aflfræðilegra áhrifa inni í griddsellunni. Annar liður vinstri hliðar í jöfnu (3.1.14) lýsir breytingum á G_i vegna aðstreymis af G_i um jaðar griddsellunnar.

Með beitingu setningar Leibniz á síðustu jöfnu í jöfnusafni (3.1.10) fékkst jafna (3.1.13). Hægt er að beita annarri setningu á fyrrgreinda jöfnu sem nefnist *the transport theorem* á ensku [Gerhart et. al. ,1992]. Hægt er að kalla þessa setningu flutningssetninguna. Þessi setning gefur:

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} G_i(x_p, t) dR = \frac{d}{dt} \int_{R_{C.A.}(t)} G_i(x_p, t) dR + \int_{\partial R_{C.A.}(t)} G_i(x_p, t) (v_i^{rel}(x_p, t) n_i) dS \quad (3.1.17)$$

Stærðin $R_{C.A.}(t)$ er svo kallað stýriflatarmál⁷ (control areal) og hefur þann kost fram yfir efnisflatarmál (material areal) $R(t)$ að minni kröfur eru gerðar til þess því það þarf ekki alltaf að samanstanda af sama efninu (nánari umræðu um efnisflatarmál $R(t)$ má sjá í viðauka A og B).

Í setningu Leibniz er hraðinn v_i hraði jaðars efnisflatar $\partial R(t)$, en í flutningssetningunni er hraðinn v_i^{rel} hraði efnis (þ.e. hafíss) í gegnum jaðarinn $\partial R_{C.A.}(t)$. Til dæmis ef við látum þetta stýriflatarmál fylgja efninu (eins og $R(t)$ gerir) þá er enginn flutningur til staðar gegnum þennan jaðar þannig að $v_i^{rel} = 0$ og:

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} G_i(x_p, t) dR = \frac{d}{dt} \int_{R_{C.A.}(t)} G_i(x_p, t) dR$$

eða með öðrum orðum $R_{C.A.}(t) = R(t)$. Ef $R_{C.A.}(t)$ er látið vera kyrrt í kerfinu og flatarmál þess látið vera óháð tíma ($R_{C.A.} \neq R_{C.A.}(t)$) þá fæst [Gerhart et. al. ,1992]:

⁷ Í þrívíðu rúmi er þessi stærð kölluð stýrirúmmál (control volume).

$$\frac{d}{dt} \int_{R_{C.A.}(t)} G_I(x_p, t) dR = \int_{R_{C.A.}(t)} \frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} dR$$

Sér í lagi ef stýriflatarmálið er látið vera flatarmál griddsellunnar: $R_{C.A.} = \Delta x_1 \times \Delta x_2$ þá fæst með jöfnu (3.1.17) og síðustu jöfnu í jöfnusafni (3.1.10) :

$$\int_{\Delta x_1 \times \Delta x_2} \frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} dR + \int_{\partial(\Delta x_1 \times \Delta x_2)} G_I(x_p, t) (v_i^{rel}(x_p, t) n_i) dS = \int_{\Delta x_1 \times \Delta x_2} \Psi_I^{rel}(x_p, t) dR \quad (3.1.18)$$

þar sem

$$\Psi_I^{rel}(x_p, t) = \frac{\partial \varphi_I(x_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi_I(x_p, t) v_q^{rel}(x_p, t))}{\partial x_q}$$

Þar sem $R_{C.A.} = \Delta x_1 \times \Delta x_2$ er kyrrt í kerfinu og flatarmál þess látið vera óháð tíma þá sést að hraðinn gegnum jaðarinn $\partial R_{C.A.}$ er hinn eiginlegi hraði efnisins í kerfinu (þ.e. hraði hafíssins). Þess vegna er hægt að rita $v_i^{rel} = v_i$. Jafna (3.1.18) verður þá:

$$\boxed{\int_{\Delta x_1 \times \Delta x_2} \frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} dR + \int_{\partial(\Delta x_1 \times \Delta x_2)} G_I(x_p, t) (v_i(x_p, t) n_i) dS = \int_{\Delta x_1 \times \Delta x_2} \Psi_I(x_p, t) dR} \quad (3.1.19)$$

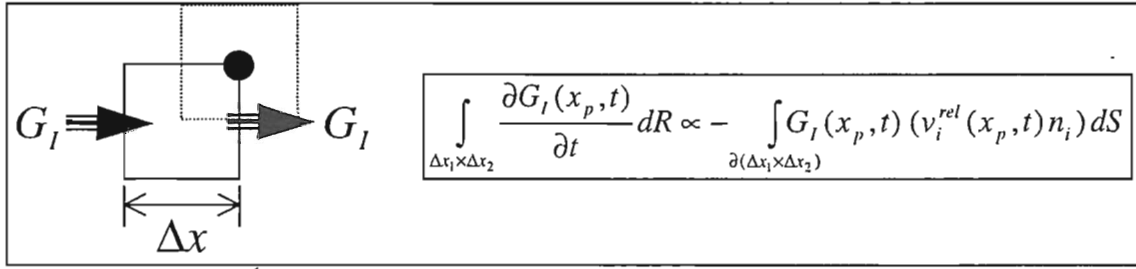
Jafna (3.1.19) lýsir varðveislu samfelldra hafísagna í hverri gridsellu.

Mismunurinn á samfelldri efnisögn og griddsellu er tvenns konar.

- 1) Æskilegt er að stærð samfelldrar efnisagnar sé töluvert minni en stærð griddsellunnar svo að G_I -fallið geti hegðað sér sem samfelld fall í tíma og rúmi. Þetta skilyrði er ekki nauðsynleg forsenda fyrir notkun á jöfnu (3.1.19) því heildi af ósamfelldu falli er vel skilgreint. Hins vegar ef beitt er setningu Gauss og síðan lemmu duBois-Reymonds á þessa jöfnu, fæst jafna (3.1.13). Þá verður þetta skilyrði að vera til staðar svo að afleiðurnar í jöfnunni séu skilgreindar.
- 2) Samfelld efnisögn inniheldur alltaf sama efnið (þetta er grundvallarskilgreining á þessari ögn og hana má sjá í viðaukum A og B) en griddsellan gerir það ekki því hún er kyrr og flæða samfelldar agnir gegnum hana.

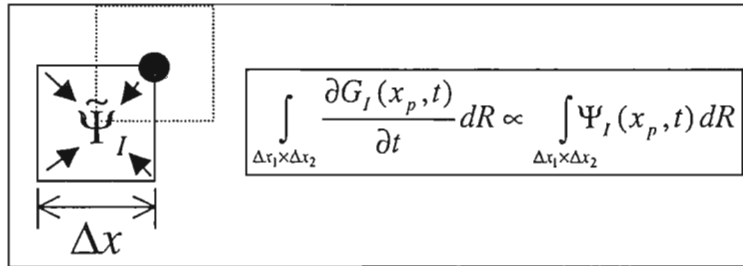
Ef hver liður jöfnunnar er skoðaður með tilliti til griddsellunnar í mynd 2.1 þá fæst:

Breyting á G_I inni í tilsvareandi griddsellu er annars vegar vegna að- og útstreymis af G_I um jaðar hennar:



Mynd 3.1: Áhrif aðstæmyshlutans í jöfnu (3.1.19). Samsvarandi mynd má sjá í mynd 1.2, kafla 1.

og hins vegar vegna aflfræðilegrar endurdreifingar inni í griddsellunni eða með öðrum orðum vegna áhrifa tengdum Ψ_I -fallinu:



Mynd 3.2: Áhrif endurdreifingarfallsins í jöfnu (3.1.19). Samsvarandi mynd má sjá í mynd 1.3, kafla 1.

3.2 Varmafræðileg áhrif á massavarðveisluna

Athuga þarf áhrif breytingar á G_I í jöfnu (3.1.14), vegna varmafræðilegrar myndunar eða eyðingar hafíss. Við ritum vaxtarhraða íss með þykktina h við yfirborðshita sjávar T_{sea} og yfirborðshita lofthjúps T_{air} , sem $f(h, T_{sea}, T_{air})$. Raunverulegur vaxtarhraði tiltekinnar ísagnar sem er í punkti x_p á augnablikinu t og með þykktina h er því: $f(h, T_{sea}(x_p, t), T_{air}(x_p, t)) = f(x_p, h, t)$. Þar sem hafísinn tekur efni sitt frá sjónum, þá sést að ísvöxturinn á sér stað aðallega hornrétt á yfirborð sjávar. Þess vegna er hægt að rita vaxtarhraða sem $\vec{f} = f(x_p, h, t)\vec{i}_3$. Þar sem meðhöndlað er tvívítt kerfi þá er “þriðja víddin”, hornrétt á hafflötinn, aðeins gervivídd. Eining þessarar viðbótarvíddar er þá þykktin á ísnum h , m.ö.o. þá er $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$ og $x_3 = h$. Stigullinn $\vec{\nabla}$ er þá ritaður sem:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial h}$$

Hraði hafíssins um þessa “þriðju vídd” er þá vaxtarhraðinn, þannig að heildarhraði hafíss í hverjum punkti x_p og tíma t er $v_q^{tot} = (v_1(x_p, t), v_2(x_p, t), f(x_p, h, t))$. Endurtekning á lið A í jöfnu (2.1.12a) um tilsvarendi þrívíðan jaðar $\partial V(t)$ er þá:

$$F_G = \int_{\partial V(t)} G_I(x_p, t)(v_i^{tot}(x_p, t)n_i)dS = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (G_I(x_p, t)v_i(x_p, t)) + \frac{\partial}{\partial h} (G_I(x_p, t)f(x_p, h, t)) \right\} dV$$

Í þessari jöfnu er notuð setning Gauss. Fyrsti liður á hægri hlið jöfnunnar lýsir áhrifum flæðis um $x_1 - x_2$ planið. En þessi liður er þegar til staðar í jöfnu (3.1.14) sem er eðlilegt, því að

útleiðslan þar er gerð í því plani. Annar liður á hægri hlið jöfnunnar lýsir áhrifum varmafræðilegrar myndunar eða eyðingar á hafís og er þetta liður sem verður að bæta við í jöfnu (2.1.12)⁸:

$$\left. \frac{\partial G_I(x_p, t)}{\partial t} \right|_{x_p, (h, t)} + \left. \frac{\partial (G_I(x_p, t) v_i(x_p, t))}{\partial x_i} \right|_{(h, t), t} + \left. \frac{\partial (G_I(x_p, t) f(x_p, h, t))}{\partial h} \right|_{x_p, t} = \Psi_I(x_p, t)$$

$$\forall I \in [1, MAX]$$

eða

$$\boxed{\frac{\partial G_I}{\partial t} + \frac{\partial (G_I v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (G_I f)}{\partial h} = \Psi_I \quad \forall I \in [1, MAX]} \quad (3.2.1)$$

Jafna (2.1.13) er kennd við Thorndike [Thorndike et. al. ,1975] en hann leiðir þessa jöfnu út frá annarri forsendu en gert er hér. Í útleiðslu jöfnu(3.1.14) og (3.2.1) var gert ráð fyrir að hafísinn sé einsleitur (homogenius). Væntigildið á ísþykktinni fyrir tiltekna griddsellu (fyrir samansafn agna sem er í þessari tilteknu griddsellu) er reiknað samkvæmt:

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \int_0^{h_{\max}} h \tilde{g}(x_p, h, t) dh \approx \sum_{I=1}^{\max} h_{I-1/2} G_I(x_p, t) \quad (3.2.2)$$

og væntigildið á ísþykktinni fyrir efnisflatarmálið $R(t)$ er:

$$\langle h_R(\hat{x}_p, t) \rangle = \frac{\int_R \int_0^{h_{\max}} h \tilde{g}(x_p, h, t) dh dR}{\int_R dR} \approx \frac{\sum_{x_p \in R} \sum_{I=1}^{\max} h_{I-1/2} G_I(x_p, t) \Delta R}{\sum_{x_p \in R} \Delta R} \quad (3.3.3)$$

Hér er $h_{I-1/2}$ meðalþykkt hvers ísflokks fyrir sig. Hér er stærðin $\Delta R = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$ flatarmál griddsellunar.

3.3 Varðveisla massans og líkindaþéttleiki

Hægt að huga að því, hvar lögmálið (hugmyndafræðin) um varðveislu massans hefur verið notað við útleiðslu á jöfnu Thorndikes. Svarið liggur í því að þessu lögmáli var beitt sjálfkrafa þegar farið var að lýsa þykktardreifingunni⁹ með þykktardreifingarfalli. Það fall hefur sömu eiginleika og almennt líkindaþéttleikafall sem er í sjálfu sér varðveislufall. Þetta má sjá með jöfnu (3.1.5):

$$\int_0^{h_{\max}} g_R(h, t) dh = 1 \quad (3.3.1)$$

⁸ Stærðirnar $G_I(x_p, t)$ og $\Psi_I(x_p, t)$ eru háðar stærðinni h í gegnum vísinn I . Vegna þessara tengsla er ritað $\{h, I\} = \text{fasti}$ í tilsvandi hlutfleiðu í staðinn fyrir aðeins $h = \text{fasti}$ eða $I = \text{fasti}$.

⁹ Þar sem hafísinn hefur u.þ.b. fastan eðlismassa er þykktardreifingin í raun jöfn massadreifingunni.

Sem sé, ef þykktin á einum stað í efnisflatarmálinu minnkar, verður þykktin að aukast á öðrum stað í því sama efnisflatarmáli $R(t)$. Hinir ýmsu höfundar hafa þess vegna oft talað um varðveislur þéttleika agnarinnar $\tilde{g}(x_p, h, t)$ [Thorndike et. al. ,1975],[Hibler III et. al. ,1992].

4. LÝSING Á SPENNUÁSTANDI HAFÍSS

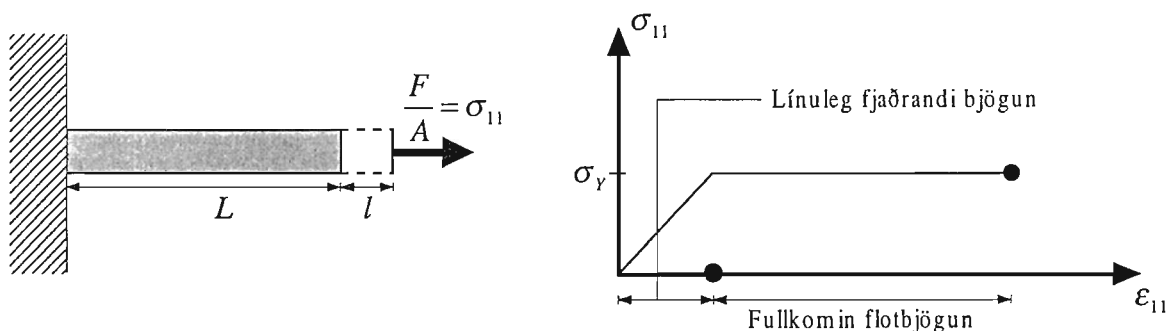
Til að lýsa spennuástandi hafíss þarf svokallaðan spennutensor. Þessi tensor er einn af mörgum liðum sem koma inn í hreyfijöfnuna til reikninga á hafíshraða. Í þessum kafla er fjallað um þann spennutensor sem er notaður í líkaninu. Þessi tensor var settur fram af Hibler 1977 og er útleiðsla og útskýring á honum í þessum kafla.

4.1 Inngangur

Þegar samfelld efni er undir álagi, á sér stað bjögun. Sjálfri bjöguninni er hægt að skipta niður í þrjú ferli:

- Fjaðrandi bjögun (elastic deformation): Hér er orka bjögunarinnar varðveitt inni í efninu þannig að strax og álagi er létt af fer efnið í sitt upphaflega ástand með hjálp fyrrgreindrar orku.
- Flotbjögun (plastic deformation): Þegar spennuálag efnisins er komið að ákveðnu marki, nefnt fjaðurmark (elastic limit) eða flotmark (yield point), byrjar myndun ferilveila (dislocation). Fer hluti þeirrar orku sem er beitt á efnið (það er orka bjögunarinnar) yfir í að afmynda tengsl frumeinda eða sameinda efnisins annars vegar, og yfir í varma sem hitar upp efnið hins vegar. Þessi varmi hitar upp efnið og/eða losnar síðan út í umhverfið og/eða er notað við fasabreytingar efnisins. Hluti af orku bjögunarinnar verður því óafturkræfur og efnið kemst ekki í sitt upphaflega ástand.
- Brot: Undir nægilega miklu álagi brotnar efnið.

Hægt er að gera einfalda einvíða lýsingu á þessu ofangreinda fyrirbæri með því að líta á fastspennta málmstöng sem er undir togspennu við lausa endann, sjá neðangreinda mynd:



Mynd 4.1: Einföld lýsing á fjaðrandi bjögun og flotbjögun efnis.

Bjögunin í mynd 4.1 nefnist fjaðurmögnuð og fullkomlega flotkennd (elastic-perfectly plastic). Hún á raunar við fá efni og er einungis lýst hér sem dæmi.

Bjögunartensorinn (“strain tensor” eða nákvæmar “Eulerian infinitesimal strain tensor”) er ritaður sem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.1.1)$$

þar sem $u_i = x_i - X_i$ er sjálf færslan í kerfinu¹⁰ (samkvæmt viðauka B þá er $X_i \equiv x_i|_{t=0}$). Þessi tensor kemur fram sem óháða stærðin í spennutensornum: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{pq})$. Ofangreindur bjögunartensor gildir aðeins fyrir litlar færslur. Ef skoðaðar eru stórar færslur, verður að nota [Mase, 1970]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.1.2)$$

og kallast þá tensorinn á ensku “Eulerian finite strain tensor”.

Dæmi:

Fyrir litla bjögun í hinu fyrrgreinda einvíða kerfi, í mynd 4.1, er það góð nálgun að gera ráð fyrir eftirfarandi línulegri færslu: $u_i = x_i - X_i = (l/L) \cdot x_i$, sem leiðir til eftirfarandi einvíðrar velþekktrar bjögunar: $\varepsilon_{11} = l/L$.

Þegar talað er um flotástand (yield condition) er átt við stærðfræðilega framsetningu á því að efnið flýtur. Hægt er að lýsa flotástandi efnis með jöfnunni:

$$f_0(\sigma_{ij}) = C_Y$$

þar sem f_0 er eitthvert fall og C_Y er svokallaður flotfasti (yield constant). Hægt er að umrita þessa jöfnu á fornið:

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \quad (4.1.5)$$

þar sem f_1 er svokallað flotfall (yield function). Fyrir stefnusnautt efni, verður flotástandið að vera óháð stefnu hnitakerfis sem unnið er í, þannig að hægt er að rita ofangreinda jöfnu sem fall af óbreytum spennutensorsins (stress invariants) [Mase, 1979]:

$$f_2(I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma) = C_Y$$

$$I_\sigma = \sigma_{ii} \quad \wedge \quad II_\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \quad \wedge \quad III_\sigma = |\sigma_{ij}| \quad (4.1.6)$$

eða sem samhverft¹¹ fall af eigingildum áðurnefnds tensors, því eigingildin eru óháð legu hnitakerfisins sem unnið er í:

$$f_3(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y \quad (4.1.7)$$

þar sem $\sigma_{11} = \sigma_I$, $\sigma_{22} = \sigma_{II}$ og $\sigma_{33} = \sigma_{III}$ í eigingildarúmi. Nú hafa tilraunir sýnt að flotástand fyrir málma er nokkurn veginn óháð vægri þyngdarspennu¹², þ. e. óháð $\sigma_I = \sigma_{II}$

¹⁰ Með hugtakinu kerfi hér, er átt við sjálfa stöngina. Sjá umræðu í viðauka A.

¹¹ Því að enginn ás í þessu rúmi má vera sérstakur.

¹² Á ensku: “hydrostatic stress”, einnig nefnt “hydrostatic pressure” eða þyngdarþrýstingur. Orðið þyngdarþrýstingur eða þyngdarspenna fyrir tilfallið $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ á alveg rétt á sér hér, því í fullkomnum þyngdarþrýstingi, gildir lögmál Pascals: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = -(p_0 - \rho \cdot g \cdot h) \quad \wedge \quad \sigma_{ij} = 0 \quad \forall \quad j \neq i$.

$=\sigma_{III}$ línunni, þannig að hægt er að lýsa flotástandi stefnusnauðra málma sem falli af óbreytum fráviksspennutensorsins (the invariants of deviator stress tensor), þ.e.

$$f_4(II_s, III_s) = C_Y \quad (4.1.8)$$

þar sem $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}$ er fráviksspennutensorinn. Þessi tensor tekur ekki tillit til þyngdarspennu þar sem sú spenna er dregin frá almenna spennutensorum.

Verkfræðingur að nafni von Mises setti fram eftirfarandi kenningu: Þegar önnur óbreyta í fráviksspennutensorum (the second deviator stress invariant), nær ákveðnu gildi í einhverjum punkti kerfisins, er hið samfellda efni byrjað að fljóta í þeim sama punkti¹³:

$$II_s = -\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = -C_Y$$

Hægt er að setja ofangreinda jöfnu fram sem fall af eigingildum spennutensorsins:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y$$

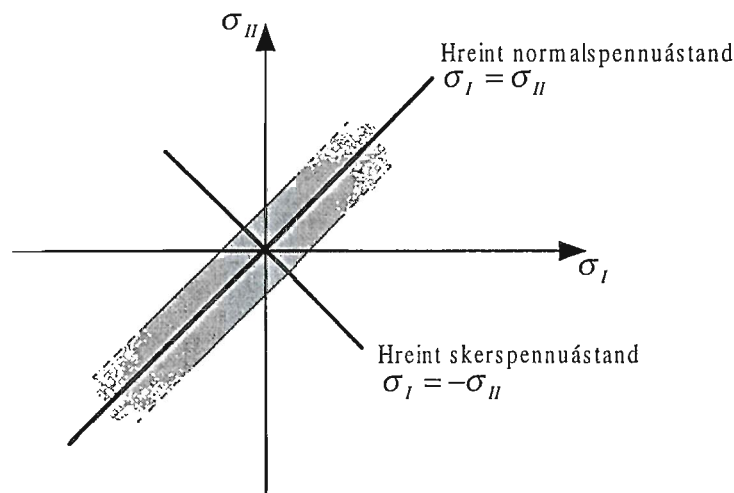
þar sem σ_I , σ_{II} og σ_{III} tákna eigingildi. Til þess að rita setningu von Mises í tveimur víddum, verður að umrita fráviksspennutensorinn frá þremur víddum: $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}$, yfir í það sem gildir fyrir tvær víddir: $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/2)\delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} II_s &= -\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = -\frac{1}{2}(s_{11}s_{11} + s_{12}s_{12} + s_{21}s_{21} + s_{22}s_{22}) = \\ &= -\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 - \sigma_{12}\sigma_{12} = -C_Y \end{aligned}$$

Með því að leysa ofangreinda margliðu í eigingildarúmi ($\sigma_{ij} = 0 \forall i \neq j$) fæst:

$$\sigma_{II} = \sigma_I \pm 2\sqrt{C_Y} \quad (4.1.9)$$

Þetta fall er sýnt á mynd 4.2.



Mynd 4.2: Myndræn lýsing á setningu von Mises fyrir tvívútt kerfi.

¹³ $s_{ii}s_{jj} = s_{11}s_{11} + s_{11}s_{22} + s_{22}s_{11} + s_{22}s_{22} = s_{11}(s_{11} + s_{22}) + s_{22}(s_{11} + s_{22}) = 0$

Myndin að ofan lýsir spennuástandi ofangreinds efnis. Hnit í þessu rúmi $(\sigma_I, \sigma_{II}) = (A, B)$ segja til um það hvort efnið er byrjað að fljóta í einhverjum punkti x_p á tímanum t , eða hvort það er í fjaðurmögnuðu ástandi. Á gráa svæðinu er efnið í fjaðurmögnuðu ástandi, en á svörtu brúninni við gráa svæðið er flot rétt farið að byrja. Af myndinni sést að þó svo að gildið á $|\sigma_I|$ og $|\sigma_{II}|$ sé aukið meðfram $\sigma_I = \sigma_{II}$ línunni þá helst efnið áfram fjaðurmagnað. Það er einmitt forsenda jöfnu (4.1.9) að flot er óháð þyngdarspennunni. Þetta er ekki svo óeðlilegt, því fyrir málma er skerspennuþolið mun minna en normalspennuþolið, en mesta skerspenna sem er til staðar í efninu er í hlutfalli við mismun á hæsta og lægsta eigingildi spennutensorsins [Mase ,1979]:

$$|\sigma_{Max\ shear}| \propto |\sigma_I - \sigma_{II}| \quad (4.1.10a)$$

Ef gert er ráð fyrir að $\sigma_I > \sigma_{II}$, þá gildir [Mase ,1970]:

$$\sigma_{Max\ shear} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \equiv \Gamma(\Pi, A_i) \quad (4.1.10b)$$

Stærðin $\Gamma(\Pi, A_i)$ verður meðhöndluð frekar í viðauka E. Annað veldið af mestu skerspennuni er háð annarri óbreytu fráviksspennutensorsins í eigingildarúmi, það er $\sigma_{Max\ shear}^2 = -II_s$. Vegna þess að ástandið er óháð þyngdarspennu, teygir gráa svæðið úr sér (fræðilega í $\pm \infty$) um 45° við σ_I -ásinn, það er meðfram $\sigma_I = \sigma_{II}$ línunni. Mesta normalspenna sem efni getur haft eru eigingildi spennutensorsins. Þess vegna er mesta meðalnorspenna í efninu:

$$\sigma_{Max\ norm} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \equiv -\Pi(\Gamma, A_i) \quad (4.1.11c)$$

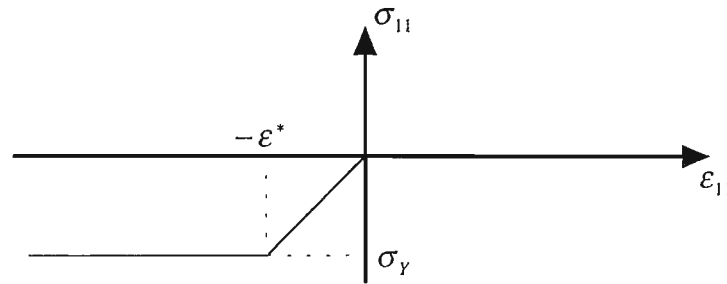
Ef $\sigma_I > \sigma_{II}$ þá er σ_I mesta mögulega normalspennan. Stærðin $\Pi(\Gamma, A_i)$ verður meðhöndluð frekar í viðauka E. Mesta meðalnorspennan er háð fyrstu óbreytu spennutensorsins, það er $\sigma_{Max\ norm} = I_\sigma / 2$. Af jöfnum (4.1.10) og (4.1.11) sést að hreint skerspennuástand er til staðar þegar: $\sigma_I = -\sigma_{II}$ og hreint normalspennuástand þegar: $\sigma_{Max\ norm} = I_\sigma / 2$ (sjá mynd 4.2). Þessar jöfnur gilda fyrir almennt samfellt efni: straumefni (til dæmis vatn) eða fast efni (til dæmis fastspenntan bjálka).

Svarta röndin á mynd 4.2 er kölluð flotfall (yield-function). Fyrir fullkomlega flotkennt efni hliðrast flotfallið ekki þegar innra eða ytra álag er til staðar, en slíkt skeður fyrir almennt samfellt efni og er þá kallað herðing (hardening). Þegar flot er komið á þá gildir spennutensorinn fyrir fjaðurkennt efni ekki lengur.

4.2 Spennuástand hafíss

Mismunandi athuganir tengdar s.k. AIDJEX¹⁴-verkefni [Pritchard ,1980] hafa gefið til kynna að “fullkomin flotbjögun” (rate-independent plastic rheologies), ekki ósvipuðri þeirri á mynd 4.3, sé viðeigandi lýsing á spennuástandi hafíss [Hibler III ,1979]. Í einvíðu rúmi er eftirfarandi mynd góð lýsing á spennuástandinu:

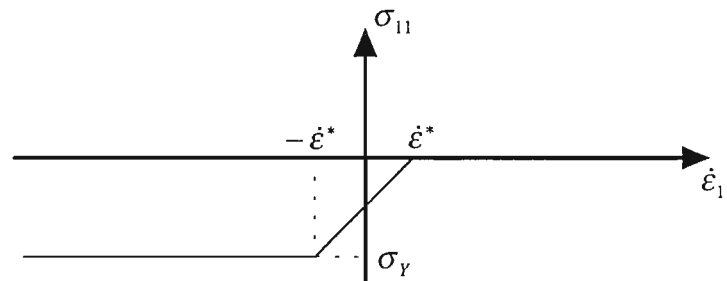
¹⁴ Arctic Ice Dynamics Joint Experiment



Mynd 4.3: Fjaðurmagnað og fullkomlega flotkennt ástand.

Þetta ástand er *fjaðurmagnað og fullkomlega flotkennt*¹⁵ (elastic-perfectly plastic) eins og fyrrgreinda dæmið á mynd 4.1.

Í einvíðu kerfi lýsir jákvætt gildi $\varepsilon_{11} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ sundurleitni (divergence), en neikvætt gildi samleitni (convergence). Samkvæmt mynd 4.3, þá sýnir ísinn engan mótþróa við sundurleitni (það er $\sigma_{11} = 0$ við $\varepsilon_{11} > 0$), þannig að gert er ráð fyrir að hann brotni u.þ.b. strax og slík hreyfing á sér stað. Á ákveðnu bjögunarbili, $\varepsilon_{11} \in (-\varepsilon^*, 0)$, er ísinn fjaðurmagnaður, en strax og bjögunin er orðinn minni en $-\varepsilon^*$, verður ísinn aftur fullkomlega flotkenndur. Í slíku ástandi á sér stað “pökkun” eða “reising” og er aðalhlutverk σ_{11} þá að vinna gegn frekari pökkun eða reisingu. Þessi ofangreinda lýsing á hafísnum hefur gefist vel og er hún almennt viðurkennd.



Mynd 4.4: Seigkennt og fullkomlega flotkennt ástand.

Til þess að geta reiknað út spennuástand í punkti x_p á tíma t verður að reikna færslumun agnar $u_i = x_i - X_i$, því spennutensorinn er háður þessu. Vandamálið liggur í því að á einhverjum tíma verður bjögunin orðin það stór að ekki er hægt að nota jöfnu (4.1.1) lengur í $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$, heldur verður að nota jöfnu (4.1.2). Ólínulegi aukaliðurinn í síðastnefndri jöfnu flækir fræðilegar útleiðslur og tölulega útreikninga. Þetta er ein af ástæðum þess að “fjaðurmagnað og flotkennt” (elastic-plastic) spennuástand er yfirleitt ekki notað, heldur er notað s.k. “seigkennt og flotkennt” (viscous-plastic) spennuástand. Litið er á hafísinn sem seigt og þjappanlegt straumefni (viscous compressible fluid) með möguleika fyrir fullkomið flotkennt ástand (perfect plastic state). Mynd 4.4 sýnir slíkt einvítt ástand [Hibler III, 1979].

¹⁵ Vegna þess að innan fræða hafísanna er flot hafíssins alltaf álitid fullkomlega flotkennt nægir að kalla ofangreint spennuástand “fjaðurmagnað og flotkennt” (elastic-plastic) í staðinn fyrir “fjaðurmagnað og fullkomlega flotkennt” og er það yfirleitt gert innan fræðigreinarinnar.

Þar sem spenna í straumefni er ekki háð sjálfri bjöguninni (deformation), heldur aðeins háð því hversu hröð bjögunin er (rate of deformation): $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\dot{\epsilon}_{pq})$, verður óháða stærðin í spennutensorum svokallaður bjögunarhraðatensor (rate of deformation tensor):

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2.1)$$

og er hann sambærilegur við línulega bjögunartensorinn fyrrgreinda að því leyti. Mikilvægur munur á þessum tveimur tensorum er að bjögunarhraðatensorinn er óháður færslu einnar agnar með tilliti til annarrar, því að straumefni getur aðeins myndað viðnám þegar streymi á sér stað í efninu. Því verður óháða stærðin í spennutensorum aðeins háð hraðamismun tveggja agna sem eru hlið við hlið á hverju augnabliki, en ekki endanlegum færslumismun tveggja tiltekinn agna. Með þessari framsetningu er komist framhjá ólínulega liðnum í jöfnu (4.1.2). Í fjaðrandi-flotkenndu ástandi er hægt að viðhalda spennu þó svo algert hreyfingarleysi ríki í ísnum. Í seigkendu-flotkenndu ástandi er slíkt hreyfingarlaust ástand nálgæð með hægu rennsli (creep-motion) [Hibler III ,1977].

4.3 Það spennuástand sem líkanið MCRIM 2.5 notar

Eins og lýst er í kafla 3.1, gerir von Mises ráð fyrir að flot sé óháð þyngdarþrýstingi (hydrostatic pressure). Þetta getur verið góð nálgun fyrir málma sem eru undir vægri spennu (moderate rates of loading). En þetta gildir ekki almennt og alls ekki fyrir stökkt efni eins og hafísinn er. Árið 1977 lagði W. D. Hibler III til að nota eftirfarandi flotfall í eigingildarúminu [Hibler III ,1977], [Malkolm ,1986].

$$\tilde{F}(\sigma_I, \sigma_{II}) = \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + P}{P} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{P} e \right)^2 - 1 = 0 \quad (4.3.1)$$

P er mælikvarði á styrk íssins og e er kennitákn (ekki miðvik) sporbaugsins skilgreint sem hlutfall lengdaráss og hæðaráss eins og mynd 4.5a sýnir. Hafísfræðingar hafa P yfirleitt ritað á forminu [Hibler III ,1979]:

$$P = \tilde{P} H(x_p, t) \exp[-\tilde{C}(1 - C(x_p, t))]$$

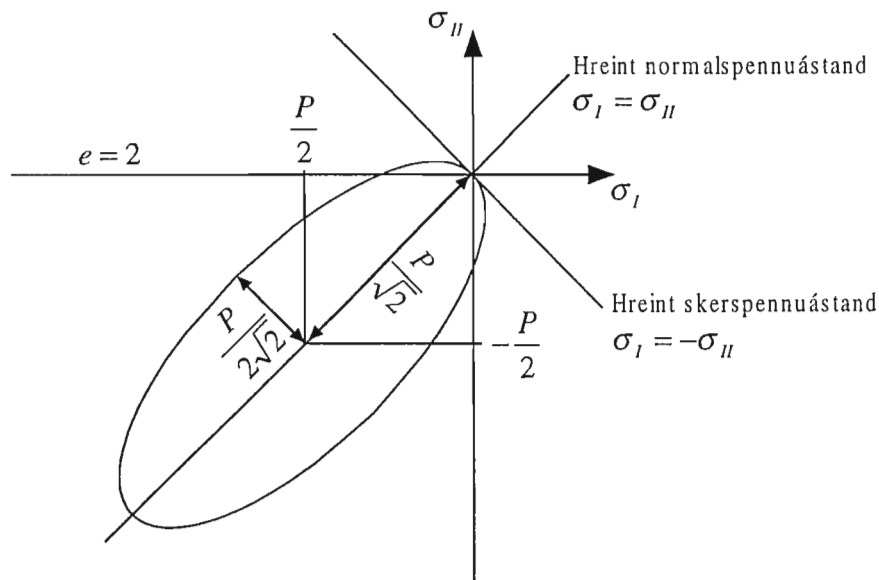
- \tilde{P} og \tilde{C} eru empírískir fastar.
- $H(x_p, t)$ er, eins og í kafla 2.2, raunveruleg þykktardreifing hafíss í kerfinu við augnablikið t og hnit x_p . Í líkaninu er jafna (2.1.14) notuð til að nálgá ísþykkina.
- $C(x_p, t)$ er heildarþéttleiki hafíss (sjá jöfnu (1.1.18)).

Líkanið MCRIM 2.5 notar ekki ofangreinda jöfnu heldur [Thorndike et. al. ,1975], [Reimer et. al. ,1980],

$$P = P^* \sum_{l=1}^{TMAX} h_{l-1/2}^2 A_l$$

Stærðin P^* er ákveðið fræðilegt fall [Reimer et. al. ,1980]. Líkanið meðhöndlar hinsvegar P^* sem empírískan fasta, breytt eftir þörfum til að fá sem bestu keyrslu. Mælt er með P^* sem $50000 N/m^3$ fyrir $e=1$, en yfir $50000 N/m^3$ fyrir $e=2$. Stærðin $A_l(G_l)$ er það flatarmál griddsellunnar sem er að yfirgefa ísþykktina $h \in [h_{l-1}, h_l[$ vegna aflfræðilegra áhrifa tengdum Ψ_l -fallinu, en það fall tekur einnig tillit til þess flatarmáls sem er að ná þessari ísþykkt. Almennt gildir $\Psi_l = \Psi_l(A_l, N_l, \dot{\epsilon}_{ij})$ þar sem stærðin $N_l(G_l)$ er það flatarmál sem er að ná ísþykktinni $h \in [h_{l-1}, h_l[$. Hugmyndafræðin á bak við Ψ_l -fallið er ekki einföld, en hana má sjá í [Thorndike et. al. ,1975].

Líkanið MCRIM 2.5 notar jöfnu (4.3.1). Jafnan fyrir kennitáknið $e=2$ er sýnd á mynd 4.5a hér að neðan:



Mynd 4.5a: Flotfall samkvæmt uppástungu Hiblers.

Með því að diffra orkujöfnuna (C.3) í viðauka C með tilliti til spennutensorsins og finna útmark með:

$$F(\sigma_{ij}) = \tilde{F}(\sigma_I, \sigma_{II}) = 0$$

sem skilyrði (þannig að $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^P$), fæst með setningu Lagranges um útmark:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \dot{u}(\dot{h}, \dot{q}, \sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}^P))}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\dot{h}, \dot{q}, \dot{\epsilon}_{ij}^P = \text{konst}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\rho \left\{ \dot{h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} \right\} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \right) \Big|_{\dot{h}, \dot{q}, \dot{\epsilon}_{ij}^P = \text{konst}} = \\ &= \gamma \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\dot{h}, \dot{q}, \dot{\epsilon}_{ij}^P = \text{konst}} \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^P = \gamma \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

- u er innri orka samfelldrar efnisagnar á massaeiningu.

- \dot{q}_i er varmaflæði á tímaeiningu um jaðar efnisrúmmáls. Varmaflæði um $\partial R(t)$ er gefið með lögmáli Fouriers (sjá viðauka B).
- \dot{h} er innri varmamyndun eða útdráttur á tímaeiningu vegna efnafræðilegra ferla.
- γ er Lagrange-margfaldarinn.

Hér sést að $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ stefnir hornrétt á flotkúrfuna:

$$F(\sigma_{ij}) = \tilde{F}(\sigma_I, \sigma_{II}) = 0$$

Með því að setja

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})}}{2}$$

inn í jöfnu (4.3.1) fæst:

$$F = \left(\frac{\sigma_{11}}{P} + \frac{\sigma_{22}}{P} + 1 \right)^2 + \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{P^2} e^2 - \frac{4}{P^2} (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}\sigma_{21}) e^2 - 1 \quad (4.3.3)$$

Með jöfnum (4.3.2) og (4.3.3), fæst síðan:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{P}{\Delta} \right) \left\{ \frac{1}{e^2} \dot{\epsilon}_{ij}^P + \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \frac{\dot{\epsilon}_{kk}^P}{2} \delta_{ij} \right\} - \frac{P}{2} \delta_{ij} \quad (4.3.4)$$

þar sem...

$$\Delta = \left\{ \left((\dot{\epsilon}_{11}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^P)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) + \frac{4(\dot{\epsilon}_{12}^P)^2}{e^2} + 2\dot{\epsilon}_{11}^P \dot{\epsilon}_{22}^P \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (4.3.5)$$

Með því að rita $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^P$ og umraða jöfnu (4.3.4) verður hún:

$$\sigma_{ij} = -\frac{P}{2} \delta_{ij} + \zeta(\dot{\epsilon}_{ij}, P) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\eta(\dot{\epsilon}_{ij}, P) \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{2} \delta_{ij} \right) \quad (4.3.6)$$

- $\zeta(\dot{\epsilon}_{ij}, P)$ er rúm-seigja hafíssins (sea-ice bulk viscosity) samkvæmt...

$$\zeta(\dot{\epsilon}_{ij}, P) = P/(2\Delta) \quad (4.3.7)$$

- $\eta(\dot{\epsilon}_{ij}, P)$ er sker-seigja hafíssins (sea-ice shear viscosity) samkvæmt...

$$\eta(\dot{\epsilon}_{ij}, P) = P/(2\Delta e^2) \quad (4.3.8)$$

- $\dot{\epsilon}_{ij} - (\dot{\epsilon}_{kk}/2)\delta_{ij}$ er sker-bjögun án rúmmálsbreytinga í tveimur víddum.
- $\dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij}$ er rúmmálsbjögun án formbreytingar.

Ef $e=1$ (hringur) er $\Delta = \dot{\gamma} = (2\dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P)^{1/2}$, en $\dot{\gamma}$ (rate of shear) er mælikvarði á bjögunarhraða og er oft notað við einföld tvívíð verkefni. Þess vegna notar líkanið Δ sem mælikvarða á bjögunarhraða í hverri griddsellu. Ef Δ er minna en ákveðið gildi (kallað *DMIN*), er Δ settur sem fasti, jafnt og *DMIN*. Þetta leiðir til þess að fyrir fast P bregst spennutensorinn línulega við bjögunartensorum $\dot{\epsilon}_{ij}$, sem leiðir til þess að hafísinn í tilsvareandi griddsellu er í seigu ástandi en ekki flotkenndu. Ef Δ rýkur upp fyrir *DMIN* fer hafísinn aftur í flotkennt ástand. Algoríþminn í líkaninu fyrir seigt og flotkennt ástand er því:

Ef $\Delta > DMIN$ þá er $\Delta = \Delta(\dot{\epsilon}_{ij})$, þar sem $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p = -\frac{P}{2} \delta_{ij} + \left\{ \frac{P}{2 \cdot \Delta(\dot{\epsilon}_{ij})} \right\} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 \left\{ \frac{P}{2 \cdot \Delta(\dot{\epsilon}_{ij}) \cdot e^2} \right\} \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{2} \delta_{ij} \right) \quad (4.3.9)$$

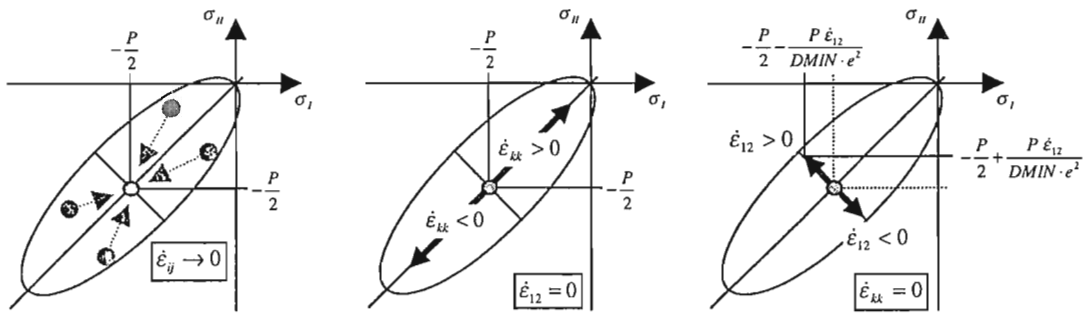
Ef $\Delta \leq DMIN$ þá er $\Delta = DMIN = \text{fasti}$, þar sem $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^v$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v = -\frac{P}{2} \delta_{ij} + \left\{ \frac{P}{2 \cdot DMIN} \right\} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 \left\{ \frac{P}{2 \cdot DMIN \cdot e^2} \right\} \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{2} \delta_{ij} \right)$$

Eftirfarandi lýsing skýrir betur hreyfingu eigingilda í eigingildarúminu. Fyrst er gert ráð fyrir því að ástandið sé seigkennt (sjá mynd 4.5b). Niðurstaðan sem þá fæst er síðan notuð fyrir það sem gildir fyrir flotkennt ástand. Til einföldunar er gert ráð fyrir að $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{22}$ og P sé fasti og verða eigingildin í seigu ástandi því:

$$(\sigma_I^v, \sigma_{II}^v) = \left(-\frac{P}{2} \left(1 - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}^v}{DMIN} + \frac{2\dot{\epsilon}_{12}^v}{DMIN \cdot e^2} \right), -\frac{P}{2} \left(1 - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}^v}{DMIN} - \frac{2\dot{\epsilon}_{12}^v}{DMIN \cdot e^2} \right) \right)$$

1) Ef $\dot{\epsilon}_{ij}^v \rightarrow 0$ þá $(\sigma_I^v, \sigma_{II}^v) \rightarrow (-P/2, -P/2)$ eins og fyrsta myndin í myndasafni 4.5b sýnir.



Mynd 4.5b: Færslur eigingilda fyrir seigkennt ástand.

2) Ef $\dot{\epsilon}_{12}^v = 0$:

$$(\sigma_I^v, \sigma_{II}^v) = \left(-\frac{P}{2} + \frac{P\dot{\epsilon}_{kk}^v}{2 \cdot DMIN}, -\frac{P}{2} + \frac{P\dot{\epsilon}_{kk}^v}{2 \cdot DMIN} \right)$$

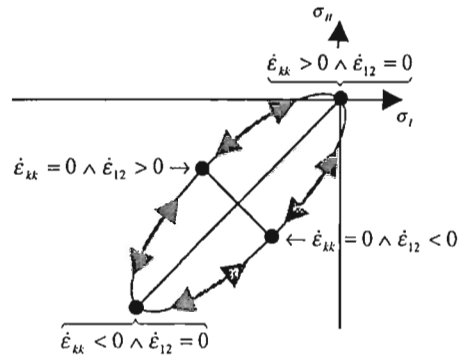
og með $\dot{\epsilon}_{kk}^v > 0$ eða $\dot{\epsilon}_{kk}^v < 0$ færast eigingildin upp- eða niður eftir miðlínunni eins og miðmynd í myndasafni 4.5b sýnir.

3) Ef $\dot{\epsilon}_{kk}^v = 0$:

$$(\sigma_I^v, \sigma_{II}^v) = \left(-\frac{P}{2} - \frac{P\dot{\epsilon}_{12}^v}{DMIN \cdot e^2}, -\frac{P}{2} + \frac{P\dot{\epsilon}_{12}^v}{DMIN \cdot e^2} \right)$$

og með $\dot{\epsilon}_{12}^v > 0$ eða $\dot{\epsilon}_{12}^v < 0$ færast eigingildin upp eða niður hornrétt á miðlínu eins og lokamynd í myndasafni 4.5b sýnir.

Fyrir flotkennt ástand eiga allar hreyfingar sér stað í tilsvarendi áttir, en alltaf á brún sporbaugsins eins og mynd 4.5c sýnir.



Mynd 4.5c: Færslur eigingilda fyrir flotkennt ástand.

Í samræmi við mynd 4.4 er gert ráð fyrir að σ_{ij} breytist sem samfelld fall í rúmi x_p . Sér í lagi verður yfirfærslan frá $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v$ yfir í $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p$ að vera samfelld. Samkvæmt fyrrgreindum algríþma er þessi samfelldni ávallt uppfyllt. Ef þessi samfelldni er ekki til staðar í einhverjum punkti kerfisins x_p , verður sprenging í þeim sama punkti þegar flot byrjar eða samkvæmt jöfnu (1.2.1):

$$\frac{dv_i}{dt} \propto \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \rightarrow \infty \quad (4.3.10)$$

Auðvelt er að hugsa sér að ofangreind jafna sé leyfileg þar sem hún er einmitt brotvaldur hafssins. Þessi hugsun er ekki rétt því hafssinn er meðhöndlaður sem eiginlegt samfelld efni og slíkt brot er því ekki mögulegt ástand. Hins vegar er hið eiginlega brot í raunverulega kerfinu nálgað með fyrrgreindu floti.

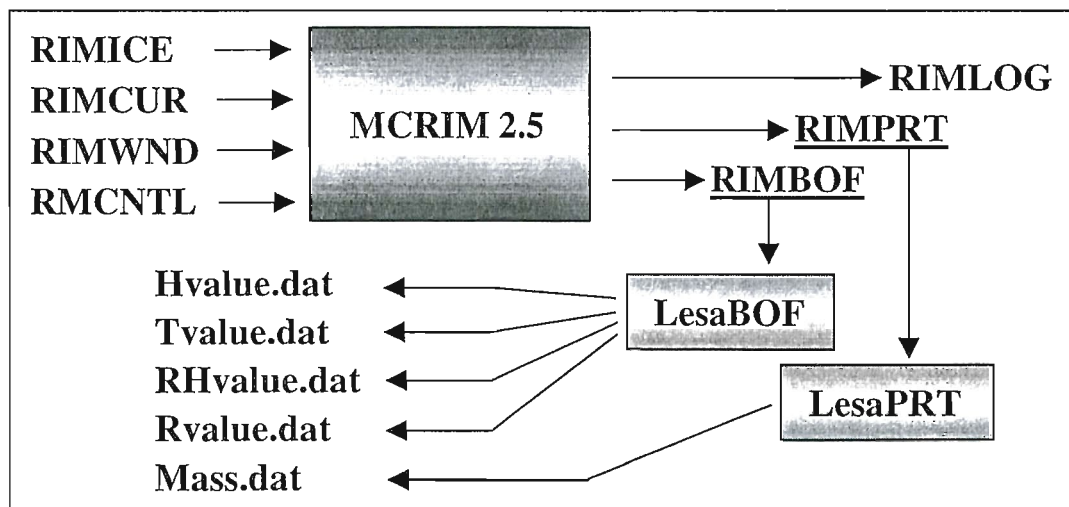
5. GAGNAÖFLUN OG LÍKANTILRAUNIR

Líkanið þarf á fjórum textaskráum að halda til þess að geta keyrt. Í þessum skráum eru haf- og vindagögn, upphafsdreifing hafíss og önnur gildi sem verða talin fram í þessum kafla. Farið verður í hvernig öflun þessara gagna fer fram. Hafísgögn sem eru notuð beint og óbeint í verkefninu koma frá tímabilinu 30. desember 1996 til 28. janúar 1997. Vindagögn sem notuð eru í verkefninu gilda fyrir tímabilið 2. janúar til 1. febrúar 1997. Önnur gögn verkefnisins eru meðaltalsgildi og þannig látnin gilda fyrir hvaða tímabil sem er. Í seinni hluta kaflans er fjallað um líkantilraunir til að sjá hvernig líkanið hegðar sér við mismunandi aðstæður.

5.1 Gagnaöflun

5.1.1 Skráarsöfn líkansins

Eins og nefnt hefur verið í kafla 1.2.3 þá þarf líkanið á fjórum textaskráum að halda til þess að geta framkvæmt útreikninga: RIMICE, RIMWND, RIMCUR og RMCNTL.



Mynd 5.1: Flæðirit skráasafna tengd líkaninu.

Eins og mynd 5.1 sýnir þá eru intaksskrárnar fjórar:

- **RIMICE** er textaskrá sem inniheldur upplýsingar um upphafsdreifingu hafíss við $t = 0$: $G_t \forall x_p \in S_{sys} \wedge t = 0$ (sjá lýsingu í kafla 1.1.5). Umfjöllun um gagnaöflun á þessari dreifingu er að finna í kafla 5.1.3.
- **RIMCUR** er textaskrá sem inniheldur upplýsingar um stefnu og styrk hafstrauma sem eru notaðir í líkaninu (sjá lýsingu í kafla 1.2.3). Umfjöllun um gagnaöflun þessara stikagilda er í kafla 5.1.4.
- **RIMWND** er textaskrá sem inniheldur upplýsingar um stefnu og styrk vinda sem eru notaðir í líkaninu (sjá lýsingu í kafla 1.2.3). Umfjöllun um gagnaöflun þessara stikagilda er í kafla 5.1.2.

- **RMCNTL** er textaskrá sem inniheldur ýmsar nauðsynlegar upplýsingar fyrir líkanið og eru þeir eftirfarandi:
 1. Upphafstími ($t = 0$: dagsetning, klukkutími og mínúta).
 2. $\Delta t = 3600 s$, tímaskref keyrslunnar (sjá kafla 2.1).
 3. $\Delta x = 23376,6 m$, stærð griddsellunnar (sjá kafla 2.1).
 4. $\phi = 69^\circ$, meðalbreiddargráða kerfisins notuð til að reikna út Corioliskraftinn (sjá kafla 1.2.1 og viðauka C).
 5. $g = 9,81 m s^{-2}$, þyngdarhröðun jarðar (sjá kafla 1.2.1).
 6. $DTEMP = 0^\circ C$, hitastigsmismunur milli hafs og lofts (sjá kafla 1.1.3).
 7. $\rho_{air} = 1,3 kg m^{-3}$, eðlismassi lofts (sjá kafla 1.2.3).
 8. $C_{air} = 3 \cdot 10^{-3}$, skerspennustuðull lofts (sjá kafla 1.2.3).
 9. $\theta_{air} = 0^\circ$, sveigjuhorn lofts (sjá kafla 1.2.3).
 10. $\rho_{wat} = 1030 kg m^{-3}$, eðlismassi hafs (sjá kafla 1.2.3).
 11. $C_{wat} = 6 \cdot 10^{-3}$, skerspennustuðull hafs (sjá kafla 1.2.3).
 12. $\theta_{wat} = 20^\circ$, sveigjuhorn hafs (sjá kafla 1.2.3).
 13. $\rho_{ice} = 910 kg m^{-3}$, eðlismassi hafíss (sjá kafla 1.2.1).
 14. $P^* = 70000 N m^{-3}$, empírískur fasti sem segir óbeint til um styrk íssins gegn frekari þökkun eða reisingu (sjá kafla 1.2.4).
 15. $e = 2$, kennitákn fyrir sporbaug Hiblers (sjá kafla 4.3).
 16. $DMIN = 10^{-9} s^{-1}$ (sjá kafla 1.2.4 og 4.3).
 17. $\theta = 1$, gildi sem tengist tölulegri brytjun hreyfijöfnunnar og er lýst í kafla 2.3.
 18. Mask-fylkið (sjá kafla 2.4).
 19. Flokkun hafíssins í tegundahópa og þykktarflokka eins og lýst er í kafla 1.1.4.
 20. Gildi tengd Ψ_I -fallinu: Sem dæmi þá lýsa þessi gildi örvunum í mynd 1.5 (sjá kafla 1.1.2). Með öðrum orðum þá tilgreina þessi gildi þykktarflokk tegundahópsins reistur/pakkaður ís sem tilsvarendi fyrstaárs eða margra ára ís fara í, við þökkun eða reisingu.

Úttaksskrárnar eru þrjár (samanber mynd 5.1):

- **RIMLOG** er textaskrá sem inniheldur upplýsingar um gang keyrslunnar. Ef einhver vandamál koma upp þá eru skilaboðin skrifuð í þessa skrá.
- **RIMPRT** er textaskrá sem inniheldur tæknilegar og eðlisfræðilegar upplýsingar (um 10 MB) og þar á meðal um breytingu á heildarmassa hafíss í kerfinu yfir keyrslutímann.
- **RIMBOF** er textaskrá sem inniheldur tæknilegar og eðlisfræðilegar upplýsingar (einnig um 10 MB) og þar á meðal um $G_I \forall x_p \in S_{sys} \wedge t > 0$.

Höfundur hefur gert forrit sem les skrána RIMPRT og skrifar í nýja skrá er nefnist Mass.dat. Í þessari skrá eru upplýsingar um breytingu á heildarmassa hafíss í kerfinu yfir keyrslutímann.

Forritið nefnist LesaPRT og má sjá frumkóðann (Lesaprt.f90) í viðauka G. Einnig hefur höfundur gert forrit sem les skrána RIMBOF og skrifar í fjórar nýjar skrár er nefnast:

- **Hvalue.dat :** Vegin meðalþykkt hafíss (sjá kafla 1.1.4):

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \sum_{l=1}^7 h_{l-1/2} G_l(x_p, t) \quad \forall x_p \in S_{\text{sys}} \wedge t > 0 \quad (5.1.1)$$

- **Tvalue.dat :** Heildarþéttleiki hafíss (sjá kafla 1.1.4):

$$C(x_p, t) = \sum_{l=2}^7 G_l(x_p, t) \quad \forall x_p \in S_{\text{sys}} \wedge t > 0 \quad (5.1.2)$$

- **RHvalue.dat :** Vegin meðalþykkt pakkaðs/reists ís (sjá kafla 1.1.4):

$$\langle h(x_p, t) \rangle = \sum_{l=5}^6 h_{l-1/2} G_l(x_p, t) \quad \forall x_p \in S_{\text{sys}} \wedge t > 0 \quad (5.1.3)$$

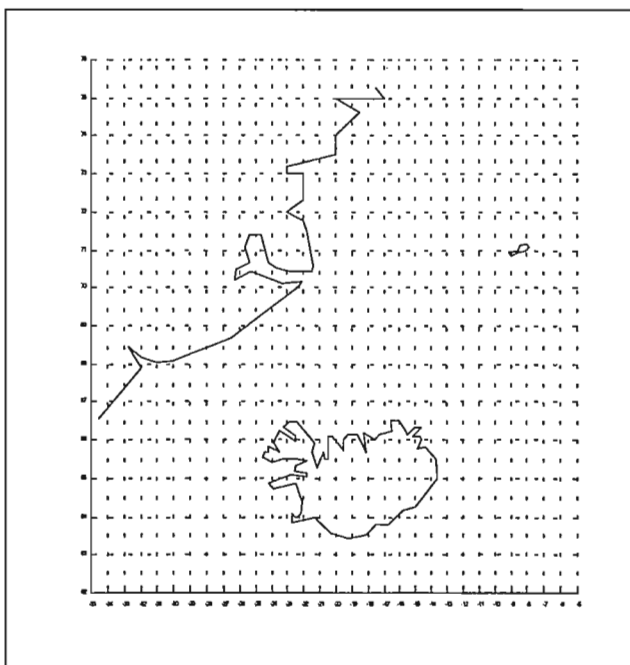
- **Rvalue.dat :** Heildarþéttleiki pakkaðs/reists ís (sjá kafla 1.1.4):

$$C(x_p, t) = \sum_{l=5}^6 G_l(x_p, t) \quad \forall x_p \in S_{\text{sys}} \wedge t > 0 \quad (5.1.4)$$

Forritið nefnist LesaBOF og má sjá frumkóðann (Lesabof.f90) í viðauka G. Ofangreindar skrár (Mass.dat, Hvalue.dat, Tvalue.dat, RHvalue.dat og Rvalue.dat) eru síðan notaðar ásamt stærðfræðiforritinu **MATLAB** við að setja niðurstöður líkansins fram á myndrænu formi. Dæmi um slíka MATLAB rúttínu má sjá í viðauka H.

5.1.2 Uppsetning hnitakerfis

Mynd 5.2 sýnir Mercator-kort af svæði sem inniheldur svæðið sem unnið er með í verkefninu (kerfi verkefnisins, sjá skilgreiningu í 1. kafla). Hluti Færeyja ætti að sjást neðst til hægri á þessari mynd, en þar sem þær eru ekki innan svæðis kerfisins sjálfs eru þær ekki teiknaðar hér. Hið eiginlega svæði kerfisins má sjá á mynd 5.3. Lóðrétti ásinn er breiddargráða en lárétti ásinn lengdargráða.

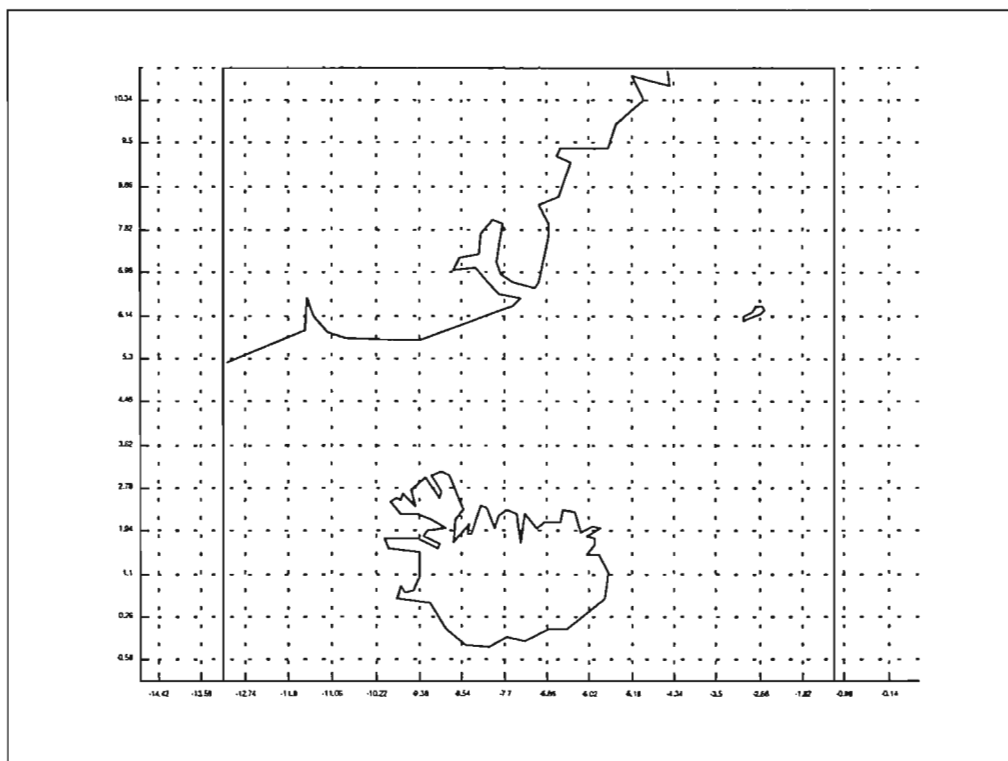


Mynd 5.2: Kerfi verkefnis í venjulegu jarðhnitakerfi: x-ásinn er lengdargráða og y-ásinn er breiddargráða.

Því ofar sem dregur í þessu hnitakerfi, verður griddsellan bjagaðri, þar sem lengd milli tveggja lengdarbauga minnkar með vaxandi breiddargráðu. Sem dæmi má líta á mynd 5.2: Ein lengdargráða við 63. breiddargráðu er 52,3km, en við 72. breiddargráðu 34,4km. Líkanið miðast hins vegar við að unnið sé með rétthyrnda og jafnarma griddsellur ($\Delta x_1 = \Delta x_2$, sjá kafla 2.1). Hægt er að leysa þetta vandamál ef farið er í frumkóða líkansins og allar reiknirútnur endurskrifaðar fyrir kúluhnit, en það er töluverð vinna þegar um er að ræða 13000 lína frumkóða. Í staðinn er miðbaugi snúið 65° norður meðfram GMT-línunni. Við miðbaug er fyrrgreind bjögun mun minni: Lengdargráða við 0 breiddargráðu er um 111,3km, en við 9. breiddargráðu um 110km. Griddsellur svo nálægt miðbaugi eru því næstum ferningslaga, þannig að nú fæst $\Delta x_1 \cong \Delta x_2$ og minnkar því skekkja útreikninga við þessa vörpun. Um almenna hnitavörpun gildir [Mase, 1970]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\theta}) \\ R \sin(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\theta}) \\ R \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \sin(\phi) \cos(\theta) \\ R \sin(\phi) \sin(\theta) \\ R \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

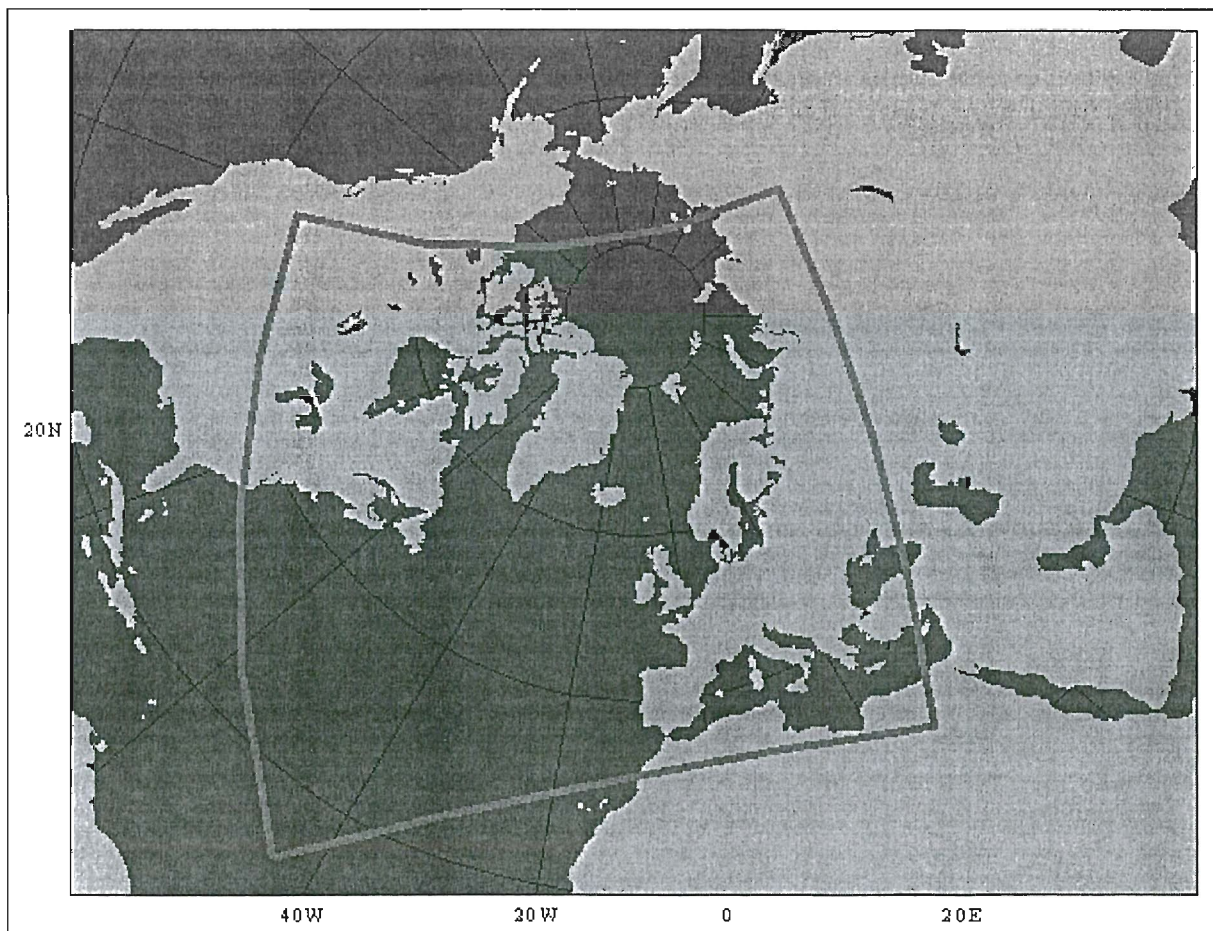
þar sem $\lambda_{ij} = \cos(\tilde{x}_i, x_j)$. Hnitin \tilde{x} , \tilde{y} og \tilde{z} tákna hið nýja hnitakerfi. Með því að varpa öllum hnitum sem unnið er með, fæst mynd 5.3. Þessi mynd er í raun Mercator-kort, en svona nálægt vörpuðum miðbaugi er það jafngilt Lambert-korti.



Mynd 5.3: Kerfi verkefnis í vörpuðu hnitakerfi. x -ás er lengdargráða og y -ás er breiddargráða.

5.1.3 Yfirborðsvindar [RIMWND]

Það er engin tilviljun að kerfinu er varpað um 65° : Stikagildið vindur er fengið frá svo kölluðu HIRLAM verkefni (High Resolution Limited Area Model), en Norðurlandþjóðirnar eru aðalþátttakendur þess verkefnis. HIRLAM gögnin sem notuð eru í þessu verkefni eru fengin frá dönsku veðurstofunni og er þar miðbaugnum varpað um 65° . Upplausnin þar er $0.42^\circ \times 0.42^\circ$ og er útreikningssvæði þeirra í vörpuðu hnitakerfi frá 53.06° vestur og 32.5° suður til 28° austur og 35.54° norður. Upphafspunktur (origo) er í 53.06° vestur og 32.5° suður. Mynd 5.4 sýnir svæðið sem danska veðurstofan notar í sínum HIRLAM útreikningum. Vindagögnin sem eru notuð í þessu verkefni eru ekki reiknuð frá líkani þeirra heldur eru þetta mæld vindagögn notuð sem upphafsskilyrði þar. Lesandi þarf því ekki að efast um áreiðanleika þeirra.



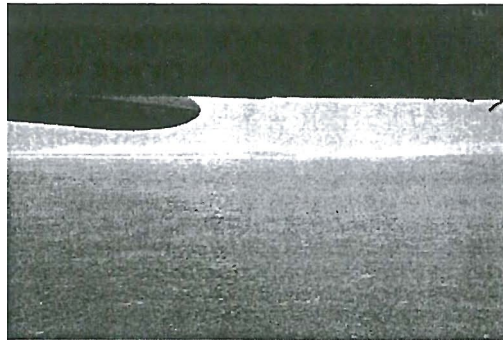
Mynd 5.4: Það svæði sem danska veðurstofan notar í sínum HIRLAM útreikningum.

5.1.4 Upphafsskilyrði fyrir hafís [RIMICE]

Upphafsskilyrði fela í sér þrennt:

- Hvar ísjaðarinn er. Auðvelt var að fá þessar upplýsingar frá utanaðkomandi stofnunum. Hins vegar er vandamál að meta áreiðanleika þeirra. Þetta gildir þó

ekki fyrir ísflug Landhelgisgæslu Íslands (LHG). Þar eru upplýsingarnar áreiðanlegar (sjá mynd 5.5).



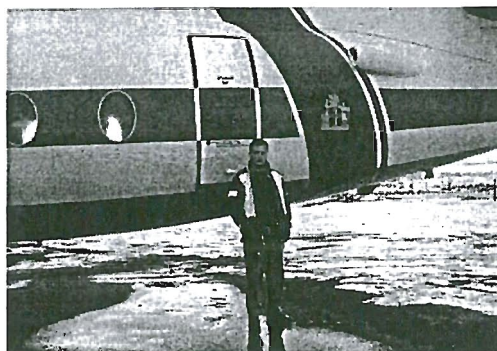
Mynd 5.5: Hafís við sjóndeildarhringinn. Mynd tekin af höfundu úr vél LHG.

- Hver dreifing á heildarþéttleika (compactness) íssins er innan ofangreinds jaðars. Þessar upplýsingar gefa hlutfall af flatarmáli griddsellunnar sem er opið haf eða með öðrum orðum hvað $C(x_p, t)$ er fyrir hverja griddsellu (sjá jöfnu (1.1.18)). Þetta eru þær upplýsingar sem hvað auðveldast er að fá.
- Hver dreifingin er á þéttleika fyrir mismunandi þykktarflokk innan hvers tegundahóps eða með öðrum orðum hvað $G_I(x_p, t) \forall I = [2, \dots, 7]$ er. Yfirleitt eru gefnar litlar sem engar upplýsingar um þessar dreifingar.

Í þeirri keyrslu sem gerð er í verkefni þessu eru notaðar um 3000 griddsellur og fyrir hverja þeirra þurfa fyrrgreindar upplýsingar að liggja fyrir. Ef léleg gögn eru fyrir hendi er keyrslan dæmd til að skila lélegri niðurstöðu. Þetta er sá hluti verkefnisins sem hefur valdið einna mestum vanda.

Upplýsingar um upphafsástand hafíss fengust frá eftirtöldum heimildum:

- *Ísflugi Landhelgisgæslu Íslands:* Því miður eru aðeins til upplýsingar um ísjaðar og þéttleika á takmörkuðu svæði eða um 5% til 10% af flatarmáli kerfisins. Þó svo að um takmarkaðar upplýsingar sé að ræða, eru þær hins vegar áreiðanlegastar. Ísflugið er farið á Fokker F-27 vél LHG (TF-SYN) sem má sjá á mynd 5.6, ásamt höfundu.



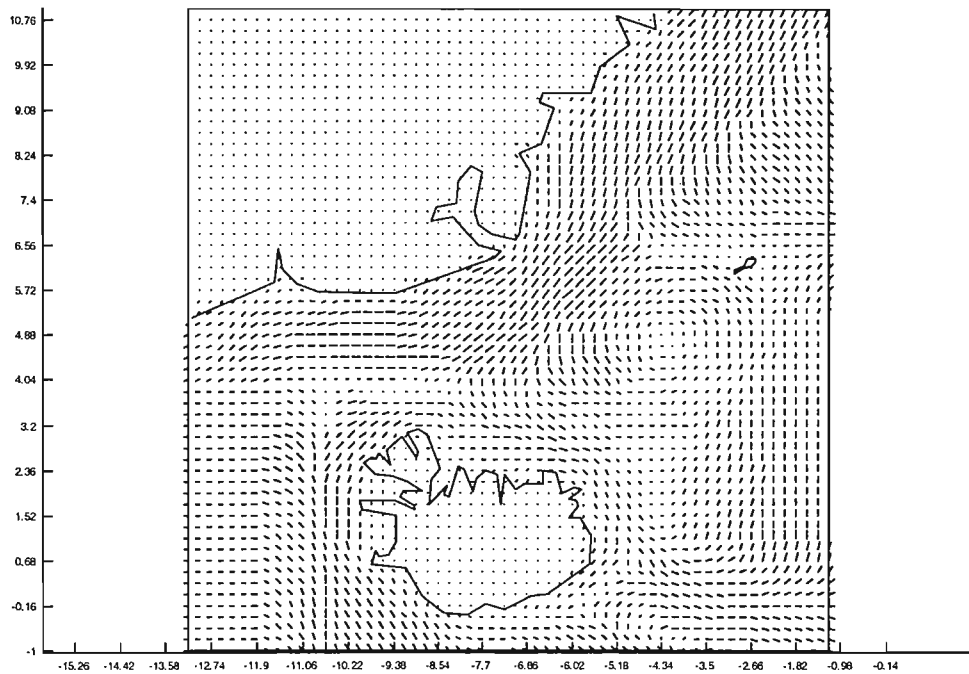
Mynd 5.6: Flugvél LHG ásamt höfundu. Mynd tekin úr myndasafni höfundar.

- *Ískortum frá Veðurstofu Noregs.* Líkt og í ísfluginu er aðeins um ísjaðar og þéttleika að ræða, en hins vegar fyrir allt kerfissvæðið. Hér er galli á gjöf Njarðar sem er áreiðanleiki upplýsinganna: Oftar en einu sinni stangast norsku kortin á við kort Landhelgisgæslu Íslands. En þar sem þau norsku eru aðallega fengin með hjálp NOAA/AVHRR veðurtungla [Shuchman & Onstatt ,1990] er nokkuð líklegt að þau síðarnefndu séu betri.
- *Ískortum frá Veðurstofu Danmerkur.* Þau gefa upplýsingar um þéttleika, tegund og oftast einhverjar upplýsingar um meðalþykkt íss. Samkvæmt viðtali við Eirík Sigurðsson veðurfræðing telur hann að Danir standi um þessar mundir einna fremst í fjarkönnun á Austur-Grænlandsísnum. Því miður nær þetta kort aðeins yfir hluta af svæði kerfisins (frá 10% til 20% af heildarflatarmáli)
- *Grein eftir Torgny Vinje og fleiri* [Vinje et. al. ,1997]: Þar sem upplýsingar hefur vantað við myndun skrárinnar RIMICE, hafa meðaltalsgildi frá þessari grein verið notuð: Samkvæmt athugunum sem gerðar hafa verið í Framsundi, er 69,4% af mælifleti með ísþykktina frá 0 metrum til 3,4 metra, 28,8% er með þykktina frá 3,4 til 11,36 metra og 1,8% frá 11,36 til 39,76m. Kemur fram að meðalheildarþéttleiki íss fyrir tímabilið 1990-1994 er 89,4% fyrir janúar og 90,5% fyrir febrúar. Meðalþykkt margra ára íss er gefin sem 2,61 metrar og fyrsta árs íss sem 1,02 metrar. Þó svo að þessi gögn séu fyrir Framsund þá leyfir höfundur sér að notfæra sér þessi gögn. Ástæðan er eftirfarandi: Samkvæmt viðtali við Björn Erlingsson hafeðlisfræðing bráðnar þessi ís lítið á leið sinni frá Framsundi til Íslandshafs (á leið sinni í Austur-Grænlands-straumnum). Á þetta sérstaklega við um þann mánuð sem keyrsla líkansins stendur yfir (2. janúar til 25. janúar 1997) en þá er sjórinn að verða hvað kaldastur [Unnsteinn Stefánsson ,1962].

Vandamál með fyrstu þrjár heimildirnar er að upplýsingarnar gilda oft ekki fyrir sama tímenn. Til dæmis fyrir vinnslu á upphafsgildi yfir daginn 18. janúar 1997 eru gögn frá Landhelgisgæslunni notuð frá sama degi, norsku kortin fyrir 20. janúar og að hluta til dönsku kortin fyrir 10. og 29. janúar til hliðsjónar.

5.1.5 Hafstraumar [RIMCUR]

Notaðar eru fjórar heimildir til að mynda meðalþrýstistrauma með tilliti til lengri tíma (sjá kafla 1.2.3): [Unnsteinn Stefánsson ,1962], [Unnsteinn Stefánsson ,1994], *Oceanographic Atlas* frá U. S. NAVY Hydrographic Office og [Dietrich et. al. ,1975]. Mynd 5.7 sýnir þessa þrýstistrauma. Æskilegra hefði verið að notast við tímaháða hafstrauma, en slík gögn voru ekki fyrir hendi.



Mynd 5.7: Hafstraumar í kerfi líkansins.

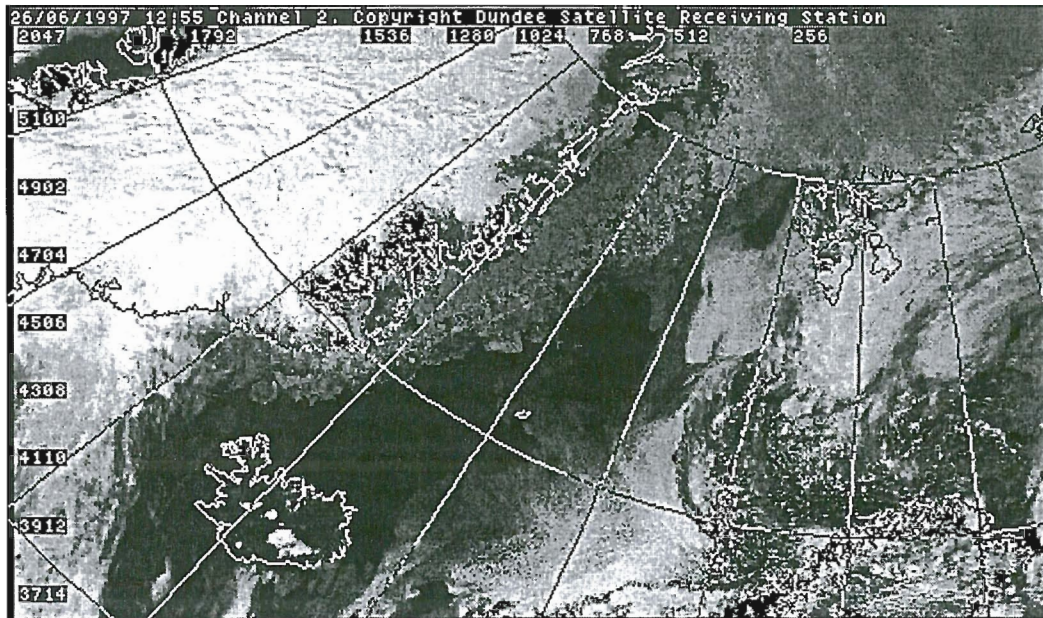
5.2 Líkantilraunir

5.2.1 Áhrif Neumann jaðarskilyrða í massavarðveislujöfnunni

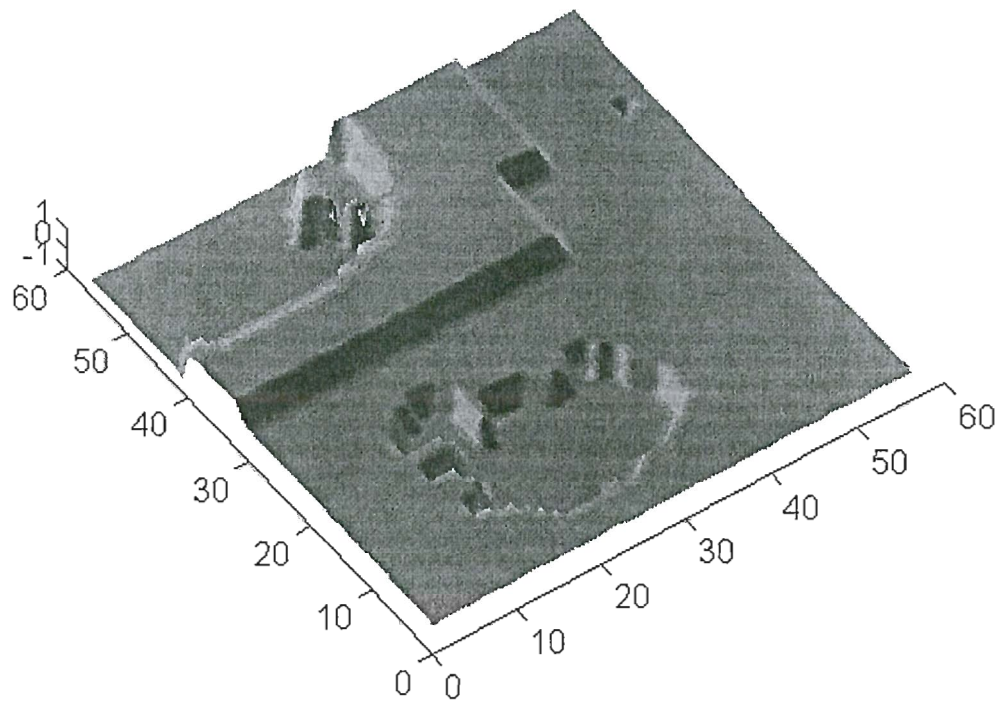
Neumann jaðarskilyrðið fyrir massavarðveisluna (sjá kafla 1.1.5) leiðir til þess að ef ís er á jaðri kerfisins og hann færir innar í kerfið, gerir líkanið ráð fyrir að meira sé til af ísnum þaðan sem hann kemur. Þetta er heppilegt því þetta er raunverulega það sem gerist í kerfinu, því að meginísmassinn kemur frá Norður-Íshafi eins og mynd 5.8 sýnir. Mynd 5.9 og 5.10 sýna þennan sama eiginleika í líkaninu.

Kerfið í mynd 5.9 og 5.10 er aðeins minna og upplausnin aðeins meiri en það kerfi sem unnið er í venjulega¹⁶. Framkvæmd var tilraunakeyrsla þar sem hafður var stöðugur norðanvindur og norðanhafstraumur. Ísmassinn í lok keyrslunnar (eftir 7 daga) hefur nánast tvöfaldast. Markmiðið með þessari keyrslu var ekki að fá raunverulega niðurstöðu heldur að sjá hvernig líkanið hegðar sér. Á myndum 5.9 og 5.10 eru Ísland, Grænland og JanMayen með neikvæða þykkt en ísinn jákvæða. Meðalísþykkt hvernar griddsellu er reiknuð samkvæmt jöfnu (5.1.1). Á mynd 5.10 sést að við suðurströnd Grænlands er meðalþykktin orðin nálægt núlli. En við austurströndina kemur stöðugt aðstreymi íss eins og á sér stað í raun og veru (sjá mynd 5.9).

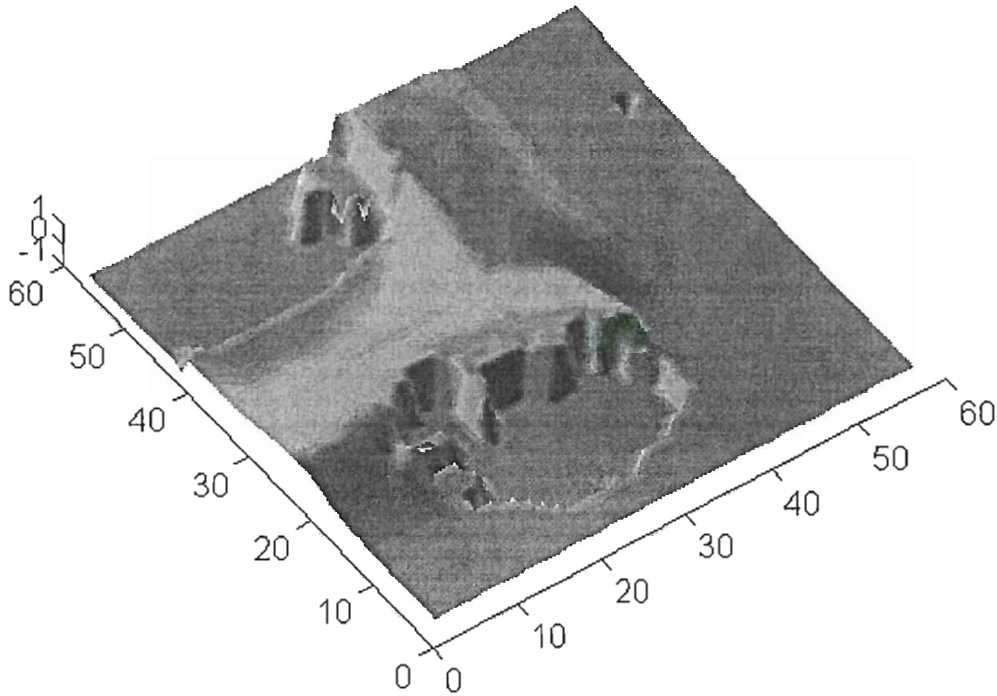
¹⁶ Þetta var það kerfi sem notað var í upphafi verkefnisins. Ástæðuna fyrir því að kerfið var stækkað má sjá í kafla 5.2.



Mynd 5.8: Gervihnattarmynd á sýnilega sviðinu frá Dundee-stofnuninni. Hér sést greinilega hvernig hafisinn streymir frá norðurlandnum. Birt með leyfi Dundee Satellite Receiving Station.



Mynd 5.9: Upphafsstand á meðalþykktardreifingu kerfisins samkvæmt jöfnu (5.1.1).



Mynd 5.10: Meðalþykktardreifing eftir 7 daga keyrslu, samkvæmt jöfnu (5.1.1).

5.2.2 Áhrif dreifiliða og stækkunar kerfisins

Eins og nefnt er í kafla 2.2 er tveim dreifiliðum bætt við massavarðveislujöfnuna (2.2.6). Þessir liðir gera massavarðveisluna parabólska í hegðun enda er tilgangurinn með þessum liðum að dempa hugsanlegar sveiflur í lausn. Það getur leitt til þess að ísinn fái óeðlilega dreifingu án þess að nokkrir skerspennuliðir séu til staðar.

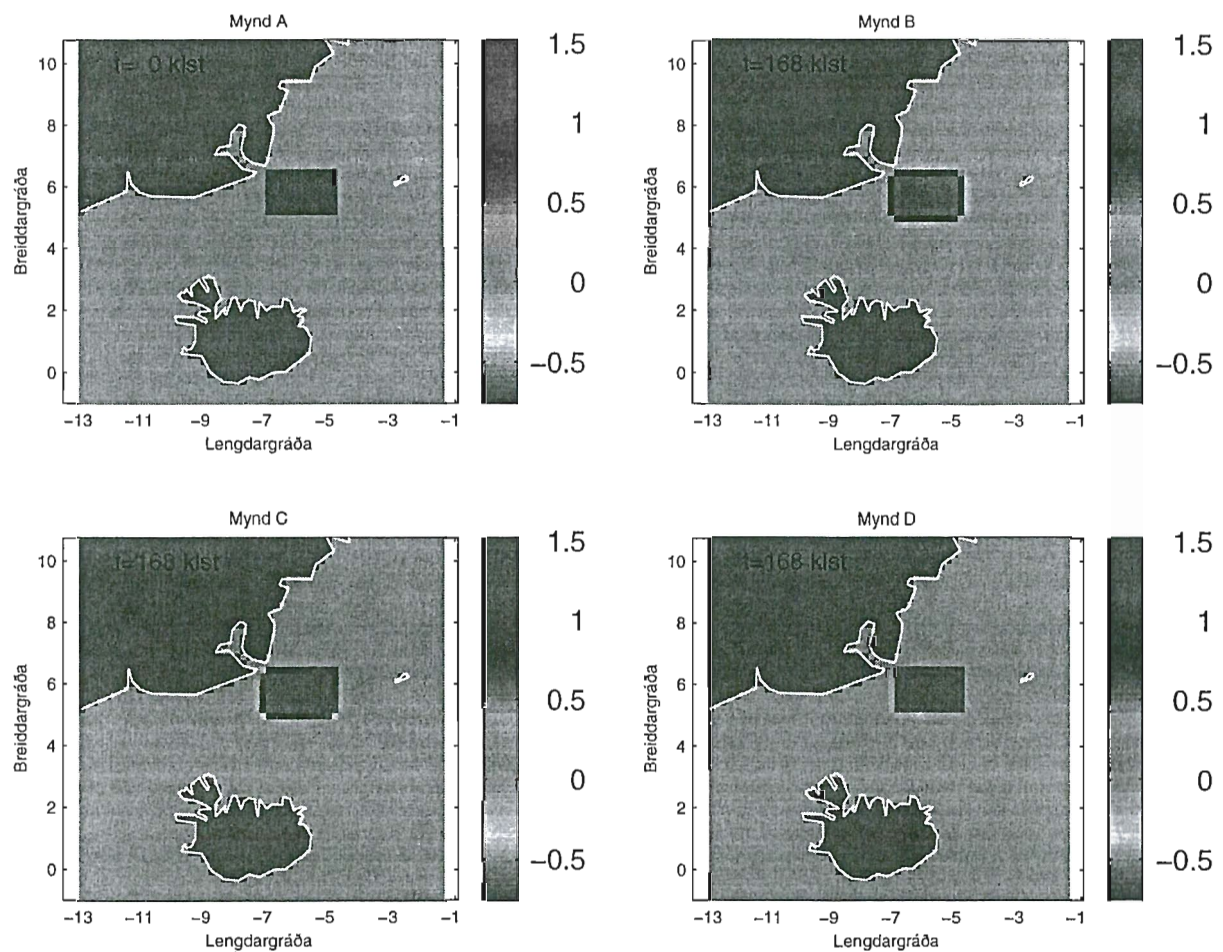
Í tölulegri keyrslu er liður B annars vegar og liðir E og F hins vegar að takast á í jöfnu (2.2.6). Liður B hefur hyperbólsk áhrif á lausn jöfnunnar, en E og F hafa parabólsk áhrif. Ef lið B er deilt með lið E fæst jafna (5.2.1).

$$\frac{\partial(G_I v_i)/\partial x_i}{D_1 \partial^2 G_I / \partial x_i \partial x_i} \sim \frac{G_I \{V\} / \Delta x}{D_1 G_I / \Delta x^2} = \frac{\{V\} \cdot \Delta x}{D_1} = Pe \quad (5.2.1)$$

$\{V\}$ er stærðargráða hraðans, Δx er lengd griddsellunnar (Í líkaninu MCRIM 2.5 gildir $\Delta x_1 = \Delta x_2$) og D_1 er dreifistuðullinn (eins og nefnt var í kafla 2.2 þá ákvarðar líkannotandi ekki þessi gildi, þau eru skilgreind í líkaninu). Pe er tölugildi kennt við Peclet og lýsir hún hlutfallinu milli flutningsliðar og dreifiliðar. Samsvarandi niðurstaða fæst með því að deila lið B með lið F. Mynd 5.11 sýnir tilraunakeyrlu. Til að hafa áhrif hafstrauma á dreifingu sem minnst eru þeir minnkaðir um eina stærðargráðu og vindar settir jafnir núlli. Ekki var unnt að setja hafstrauma jafna núlli því þá keyrði líkanið ekki. Mynd 5.11.A er upphafsdreifingin. Mynd 5.11.B er keyrsla eftir 168klst með $\Delta x = 15000\text{m}$. Í Mynd 5.11.C er búið að sexfalda

lengd gridsellunnar $\Delta x \rightarrow 6\Delta x$ og sexfalda hraða hafstrauma frá upphaflegri keyrslu. Mynd 5.11.D lýsir því sama og mynd 5.11.C en nú eru hafstraumur eins og í mynd 5.11.B. Ef skoðaður er mismunur milli mynda 5.11.B og 5.11.D sést að dreifingin er mun minni í mynd 5.11.D. Þetta er í samræmi við jöfnu (5.2.1) en þar er Peclet-talan orðin stærri og þar af leiðandi áhrif dreifiliðar minni. Þar sem búið er að sexfalda hraða hafstrauma í mynd 5.11.C er hlutfall flutningsliðar og dreifiliða í jöfnu (5.2.1) orðið sambærilegt við það sem gildir fyrir mynd 5.11.B og dreifing því svipuð.

Í númerískri keyrslu er æskilegt að hafa Peclet-töluna sem minnsta til að viðhalda númerískum stöðugleika. Slíkt leiðir hins vegar til fyrrgreindrar dreifingar. Við fyrrihluta verkefnisins ákvað höfundur að stækka kerfi verkefnisins með því að stækka stærð griddsellunnar frá 18348,3 metrum yfir í 23376,6 metra. Þetta var gert til að gefa líkaninu meiri vitneskju um hvað væri í aðsigi. Þessi stækkun minnkar einnig fyrrgreinda númeríska dreifingu, samanber fyrrgreinda umræðu.



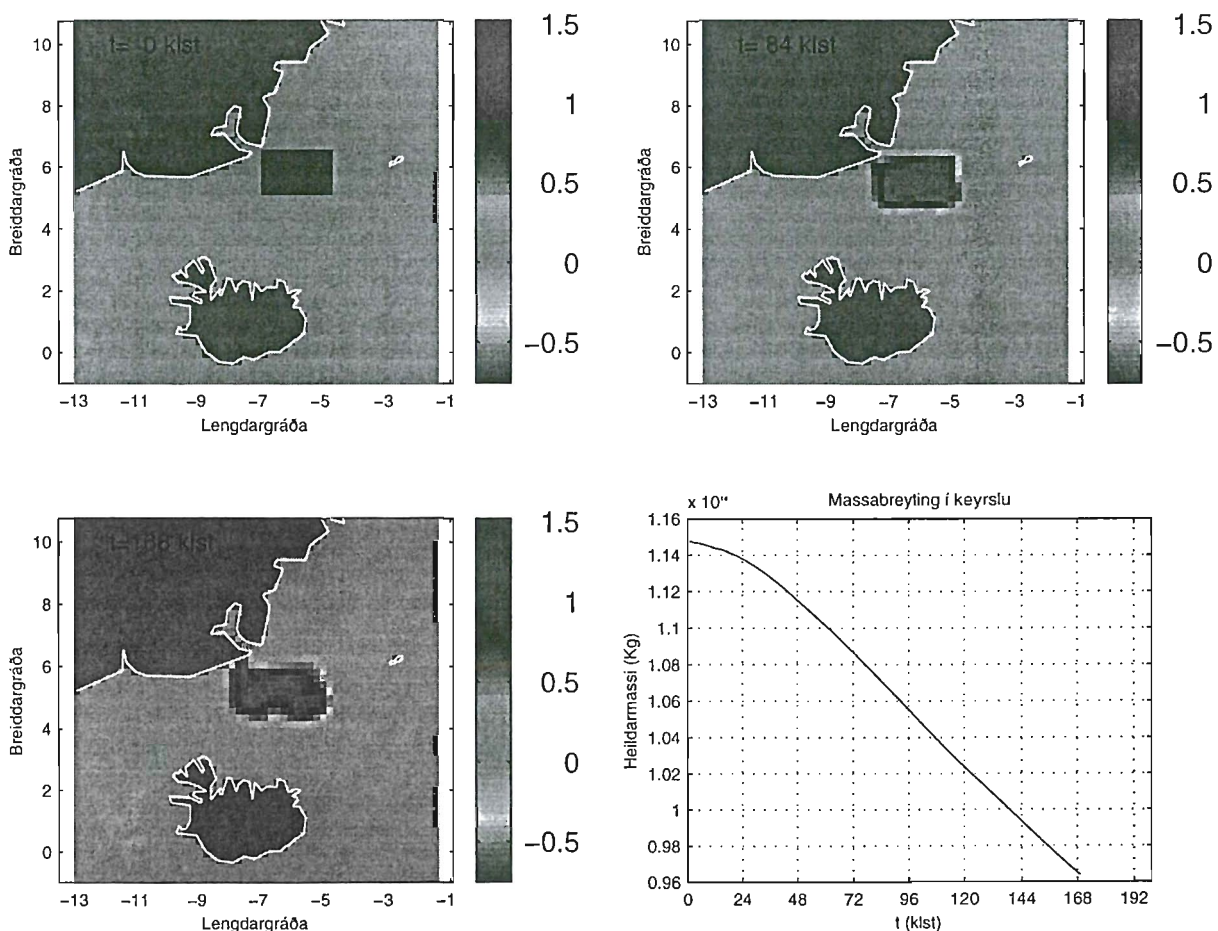
Mynd 5.11: Áhrif dreifiliðar í massavarðveislujöfnunni. Myndin sýnir meðalþykktardreifingu kerfisins samkvæmt jöfnu (5.1.1).

5.2.3 Varðveisla massans

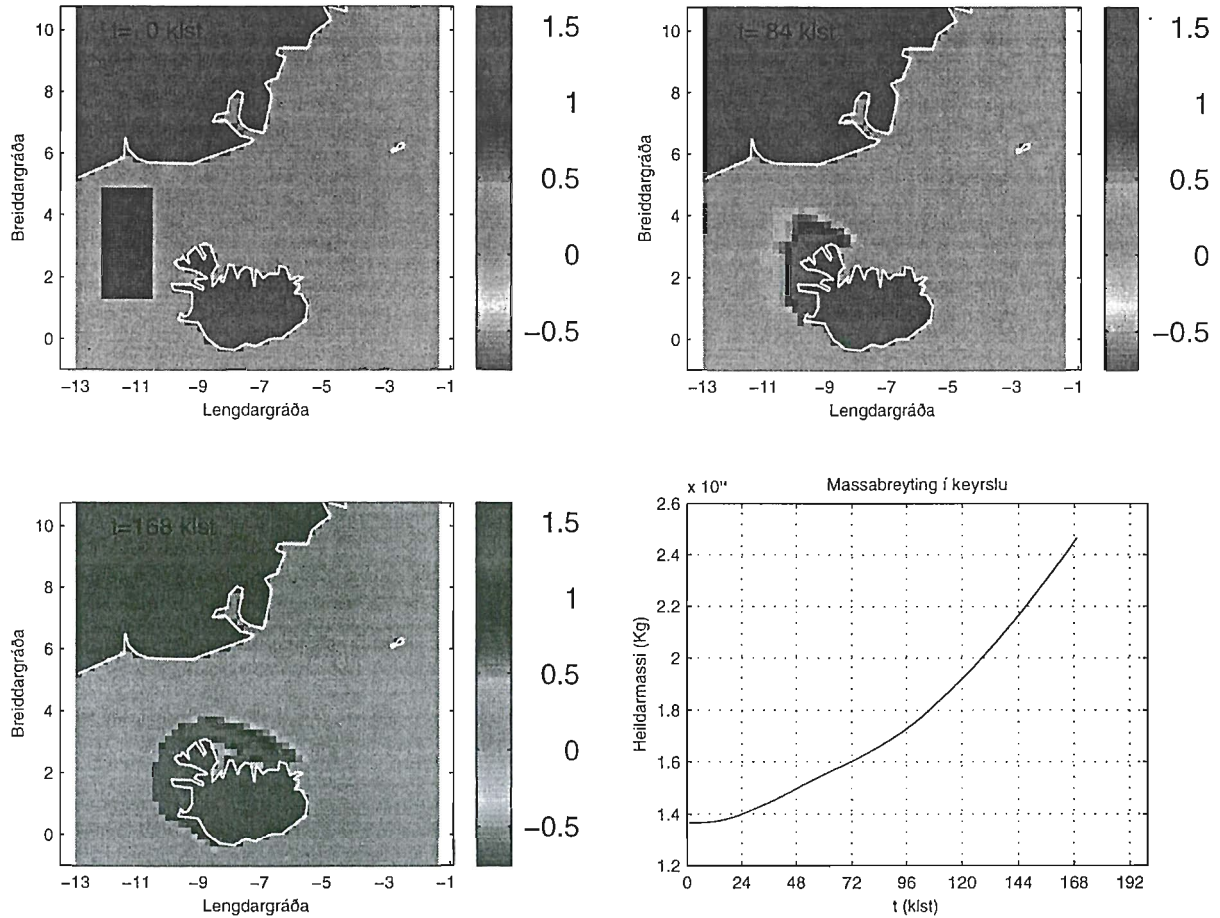
Eins og sést í kafla 5.1.1 eru nokkrir stikar (sem eru í textaskránni RMCNTL) sem þarf að stilla af áður en keyrsla hefst. Röng stilling getur leitt til lélegrar keyrslu. Sérstaklega þarf að athuga gildi sem ráða því í hvaða þykktarflokk tegundahópsins reistur/pakkaður ís, fyrsta árs

og margra ára ís fara í þegar þökkun eða reising á sér stað í þeim tegundahópi (sjá 20. lið í umfjölluninni um skrána RMCNTL í kafla 5.1.1). Röng stilling þessara gilda getur leitt til óraunverulegrar myndunar eða eyðingar massa og þar af leiðandi til rangrar niðurstöðu. Við fyrstu keyrslur hafði massinn tilhneigingu til að minnka um nokkrar stærðargráður. Gerðist það sérstaklega við árekstur við landmassa (sjá mynd 5.13).

Þykktarflokkurinn “opið haf og krap” $h \in [0, h_1[$ er í kerfinu þar sem “íslaust” svæði er. Massi þess er af stærðargráðunni 10^{13} kg og breytist hann ekki að ráði yfir 168 tímaskref. Mynd 5.12 sýnir massabreytingu í kerfinu þegar lítil sem engin víxlverkun við landsvæði á sér stað. Mynd 5.13 sýnir massabreytingu í kerfinu þegar mikil víxlverkun við landsvæði á sér stað. Á báðum myndum sést að ekki verður stærðargráðubreyting á massa yfir keyrslutímabilið. Þetta er betri niðurstaða en sú sem fékkst við upphaf verkefnisins. Æskilegt hefði verið að nota meiri tíma til að stilla og huga að öllum gildum í skránni RMCNTL en umfang verkefnisins leyfir það ekki hér.



Mynd 5.12: Massabreyting í keyrslu þegar um það bil engin víxlverkun við landmassa á sér stað. Myndin sýnir meðalþykktardreifingu kerfisins samkvæmt jöfnu (5.1.1).



Mynd 5.13: Massabreyting í keyrslu þegar mikil víxlverkun við landmassa á sér stað. Myndin sýnir meðalþykktardreifingu kerfisins samkvæmt jöfnu (5.1.1).

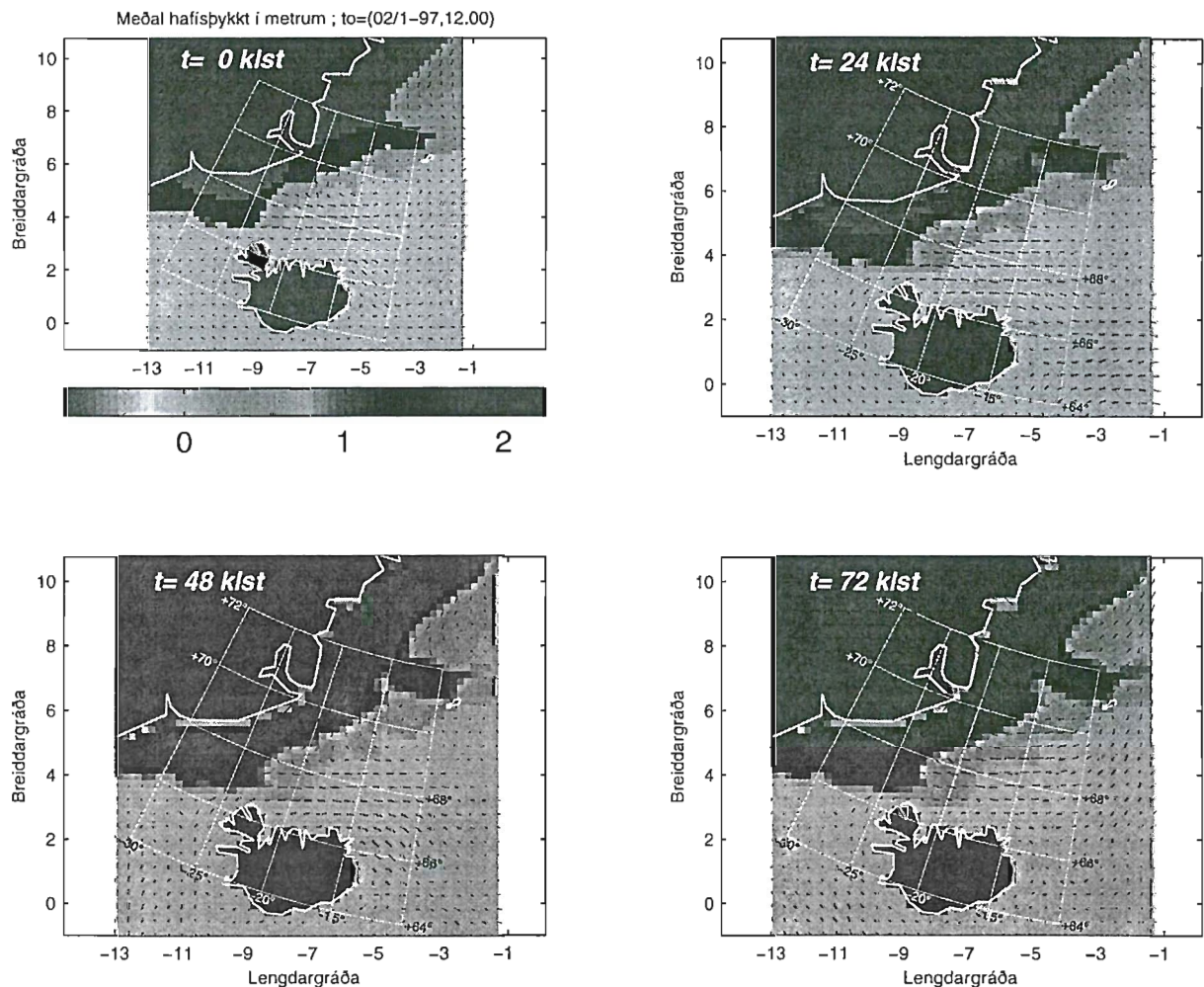
6. KEYSLSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 2. JANÚAR 1997

6.1 Venjuleg keyrsla

Mynd 6.1 sýnir niðurstöður keyrslna fyrir upphafsskilyrðið 2. janúar. Er keyrt sjö daga fram í tímann eða 168 klukkustundir og sýnir hver mynd niðurstöðu sem samsvarar því að klukkan sé 12 á hádegi. Inn á þessar myndir eru teiknaðar línur sem sýna stefnu og hlutfallslega stærð heildarskerspennu τ_i frá haf- og loftstraumum samkvæmt jöfnum (1.2.4) og (1.2.5):

$$\begin{aligned} \tau_i \bar{i}_i = & \rho_{air} C_{air} \sqrt{u_j^{air} u_j^{air}} \left(u_i^{air} \bar{i}_i \cos(\theta_{air}) + \bar{i}_3 \times u_i^{air} \bar{i}_i \sin(\theta_{air}) \right) + \\ & + \rho_{wat} C_{wat} \sqrt{u_j^{wat} u_j^{wat}} \left(u_i^{air} \bar{i}_i \cos(\theta_{wat}) + \bar{i}_3 \times u_i^{air} \bar{i}_i \sin(\theta_{wat}) \right) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Öll gildi í ofangreindri jöfnu eru skilgreind í kafla 1.2.3.

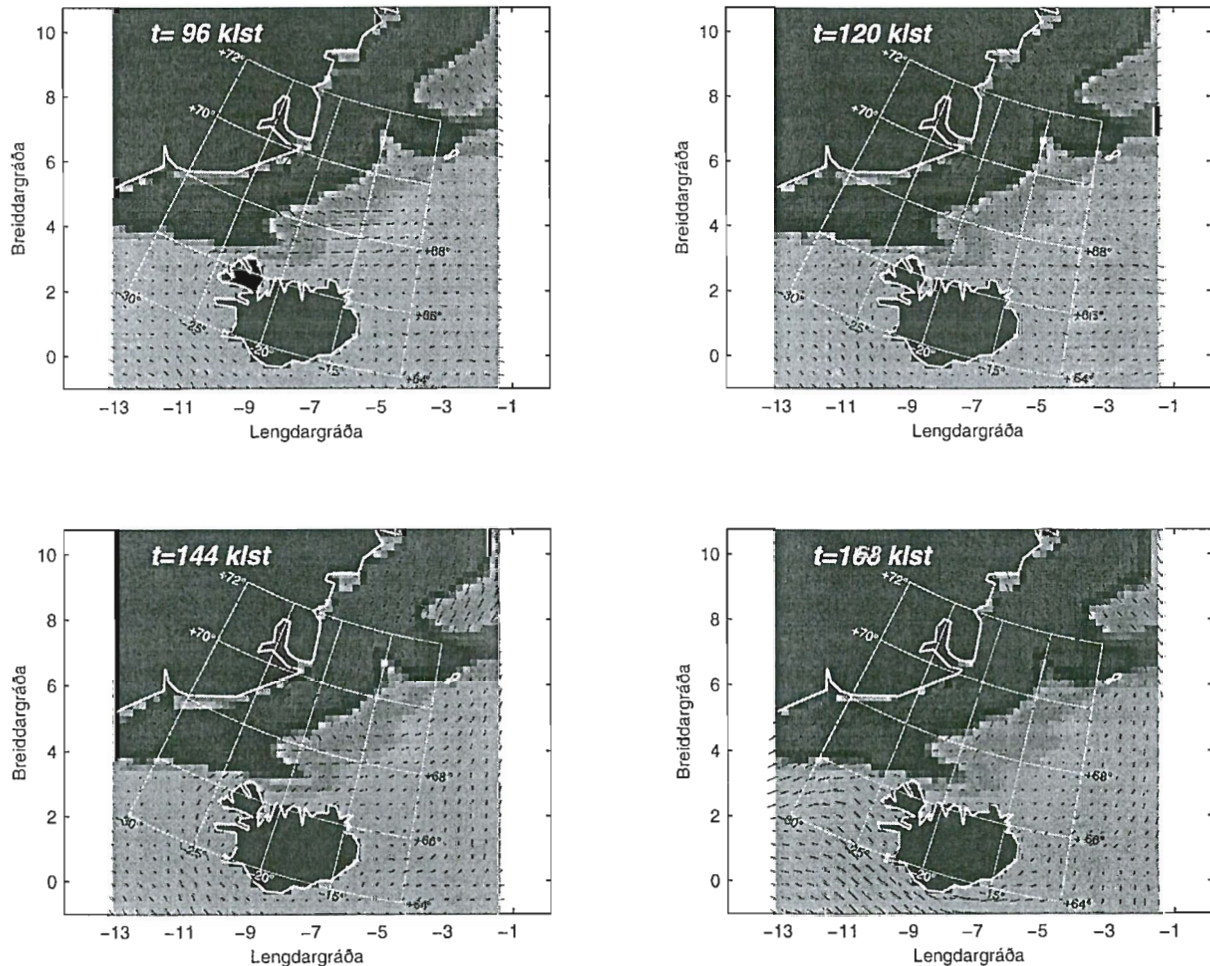


Mynd 6.1a: Fyrri hluti keyrslunnar fyrir upphafsskilyrðið 2. janúar. Sýndar eru niðurstöður fyrir 3. (24klst), 4. (48klst) og 5. janúar (72klst), klukkan 12.00. Seinni hlutinn er í mynd 6.1b.

Tafla 6.1 sýnir helstu gildi sem voru notuð í þessari keyrslu:

Fjöldi tímaskrefa:	168	Skerspennustuðull lofts: $C_{air} = 2 \cdot 10^{-3}$
Stærð tímaskrefs:	$\Delta t = 3600 s$	Skerspennustuðull hafs: $C_{wat} = 6 \cdot 10^{-3}$
Stærð griddsellu:	$\Delta x = 23376,6 km$	Sveigjuhorn lofts: $\theta_{air} = 0^\circ$
Eðlismassi hafss:	$\rho_{ice} = 910 kg m^{-3}$	Sveigjuhorn hafs: $\theta_{wat} = 20^\circ$
Eðlismassi lofts:	$\rho_{air} = 1,3 kg m^{-3}$	Ísstyrkur: $P^* = 70000 N m^{-3}$
Eðlismassi hafs:	$\rho_{wat} = 1030 kg m^{-3}$	DMIN (sjá kafla 4.3): $10^{-9} s^{-1}$
Gildi Coriolis:	$f^c = 1,36 \cdot 10^{-4} rad s^{-1}$	

Tafla 6.1: Gildi sem eru notuð í keyrslunni.

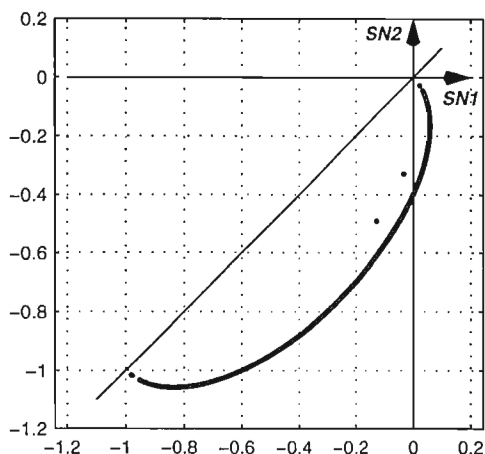


Mynd 6.1b: Niðurstaða fyrir 6. (96klst), 7. (120klst), 8. (144klst) og 9. janúar (168klst), klukkan 12.00.

Mynd 6.2 sýnir normuð eigingildi stresstensorsins fyrir ofangreinda keyrslu (sjá jöfnu (4.3.9)) samkvæmt:

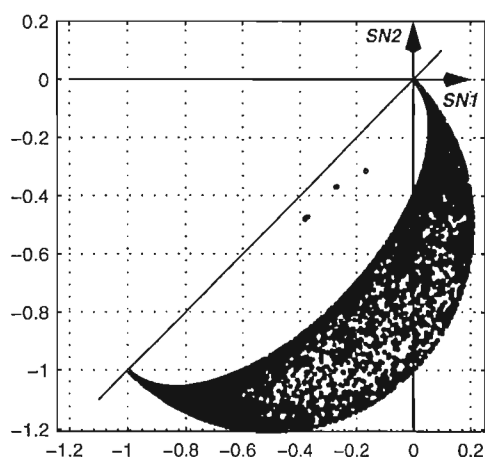
$$SN1 = \frac{\sigma_I}{P} \quad \wedge \quad SN2 = \frac{\sigma_{II}}{P} \quad (6.1.2)$$

Eigingildi hundruðustu hveðrar griddsellu eru tekin fyrir í öllum tímaskrefum. Þetta samsvarar um fjögur þúsund þörum af eigingildum. Þetta fyrirkomulag gildir alltaf nema annað sé tiltekið. Óhagkvæmt er að teikna öll eigingildi því að heildarfjöldi þeirra fyrir eina keyrslu er um átta hundruð þúsund (yfir 20MB í skrá).



Mynd 6.2: Normuð eigingildi samkvæmt jöfnu (6.1.2).

Áhugavert er að sjá hvernig eigingildin raða sér aðeins upp öðrum megin við samhverfuásinn. Höfundur áttar sig ekki á því hvers vegna þessi hegðun á sér stað en bendir þó á að þessa dreifingu má sjá í öðrum líkönum [Zhang & Hibler III, 1997]. Með samanburði á myndum 6.2, 4.5b og 4.5c má sjá að $\dot{\epsilon}_{12} > 0$ er ekki mögulegt hreyfingarástand í líkaninu.



Mynd 6.3: Normuð eigingildi áður en leiðrétting átti sér stað.

Í fyrsta sinn, sem teikning normuðu eigingildanna var gerð, fékkst mynd 6.3. Þetta eru 6765 þör eigingilda yfir fyrstu 3 tímaskrefin sem eru tekin yfir allar “virkar” griddsellur (fjöldi þeirra er 2255). Höfundur fannst þetta ankannaleg dreifing enda ekki í samræmi við fræði (sjá mynd 4.5 til samanburðar). Við nánari athugun uppgvötaðist villa í líkaninu: Jafna (4.3.5) kveður á um að:

$$\Delta = \left\{ \left((\dot{\epsilon}_{11}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^P)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) + \frac{4(\dot{\epsilon}_{12}^P)^2}{e^2} + 2\dot{\epsilon}_{11}^P \dot{\epsilon}_{22}^P \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (6.1.3)$$

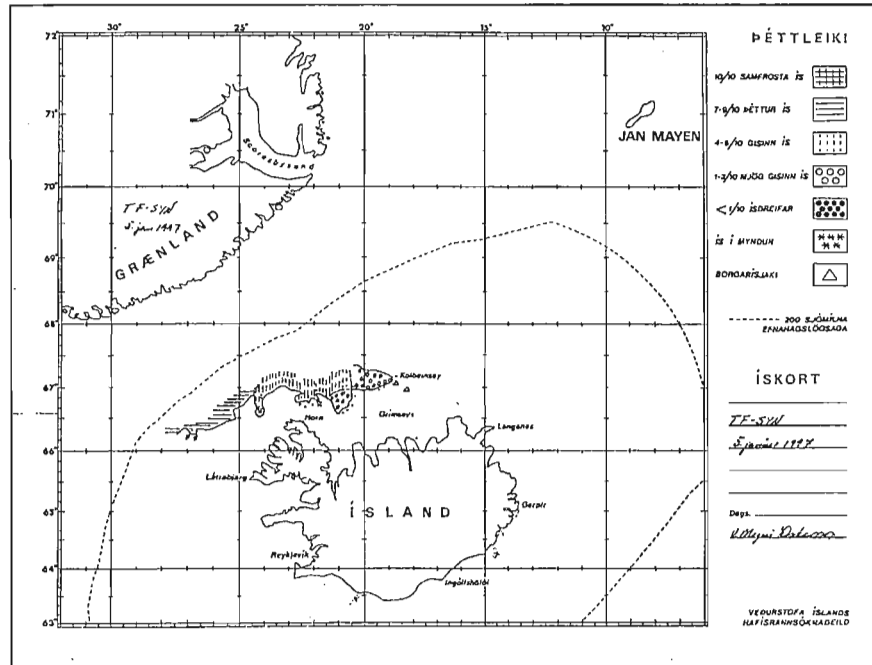
En líkanið hafði:

$$\Delta = \left\{ \left((\dot{\epsilon}_{11}^P)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^P)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{e^2} \right) + \frac{(\dot{\epsilon}_{12}^P)^2}{e^2} + 2\dot{\epsilon}_{11}^P \dot{\epsilon}_{22}^P \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (6.1.4)$$

sem leiddi til fyrrgreindrar rangrar dreifingar. Eftir lagfæringu á þessu fékkst mynd 6.2.

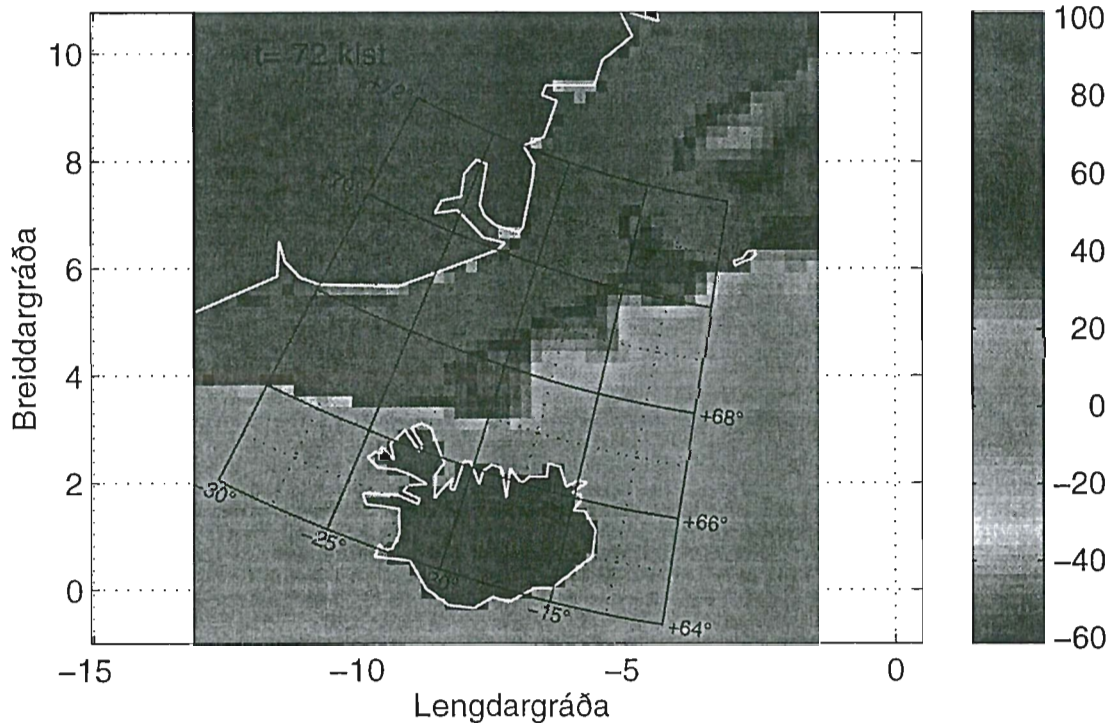
6.2 Samanburður við raunveruleikann

Mynd 6.4 sýnir ískort frá Landhelgisgæslu Íslands fyrir 5. janúar 1997. Mynd 6.5 sýnir niðurstöðu líkansins fyrir sama tíma. Bæði kortin sýna heildarþéttleika hafiss (sjá jöfnu (5.1.2)).



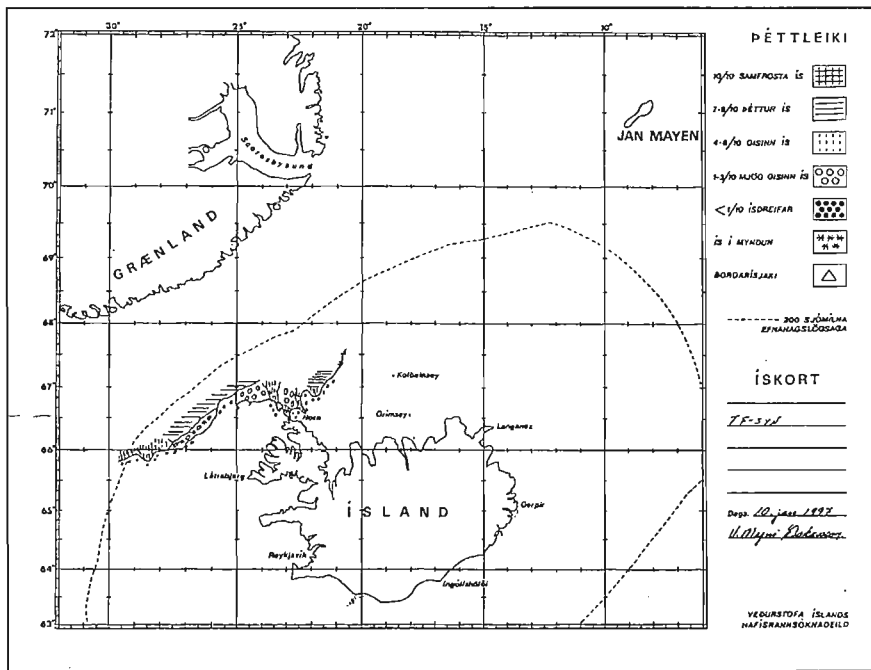
Mynd 6.4: Athugun frá Landhelgisgæslu Íslands 5. janúar.

Heildarþéttleiki hafiss (%) ; to=(02/1-97;kl.12.00)



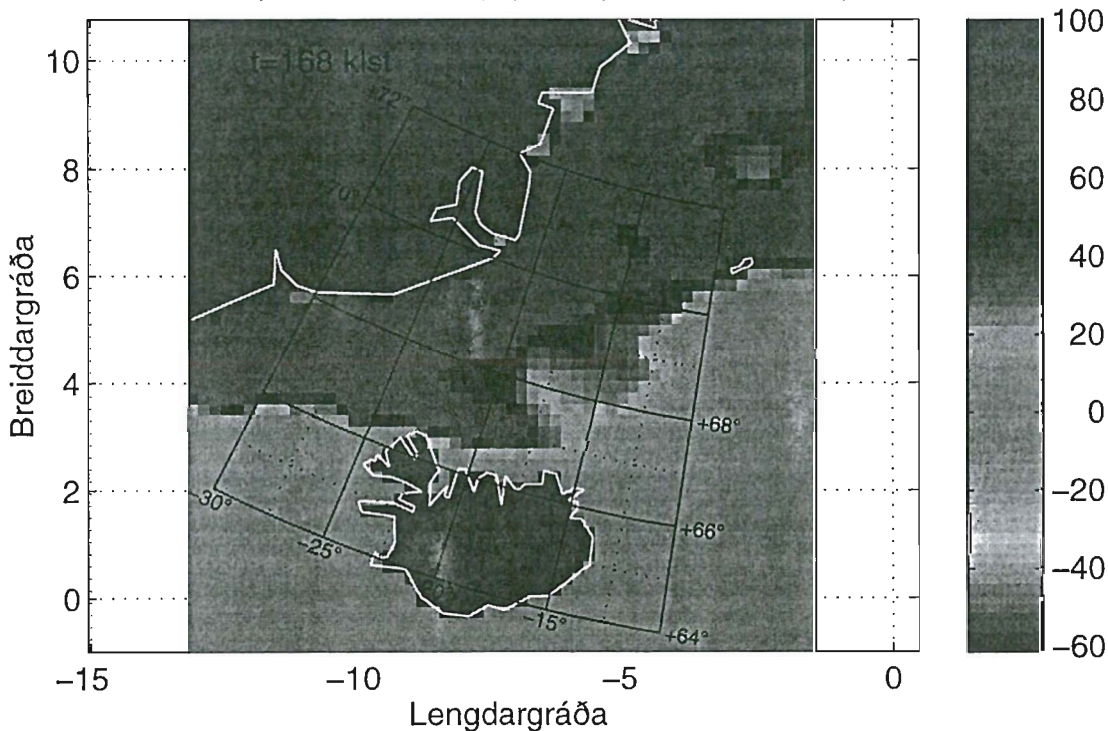
Mynd 6.5: Niðurstöðu útreikninga fyrir 5. janúar (eftir 72 tímaskref).

Samanburður á mynd 6.4 og mynd 6.5 sýnir að líkanið gefur góða niðurstöðu eftir 72 tímaskref. Öðru máli gegnir um 168 tímaskref. Mynd 6.6 sýnir ískort frá Landhelgisgæslu Íslands fyrir 10. janúar, en mynd 6.7a sýnir lokakeyrslu, þ.e. fyrir 9. janúar. Ekki var til ískort fyrir 9. janúar, en kort gæslunnar er nógu gott til að sjá að keyrslan er komin í ógöngur hvað varðar ísdreifingu við norðurströnd Íslands.



Mynd 6.6: Athugun frá Landhelgisgæslu Íslands 10. janúar.

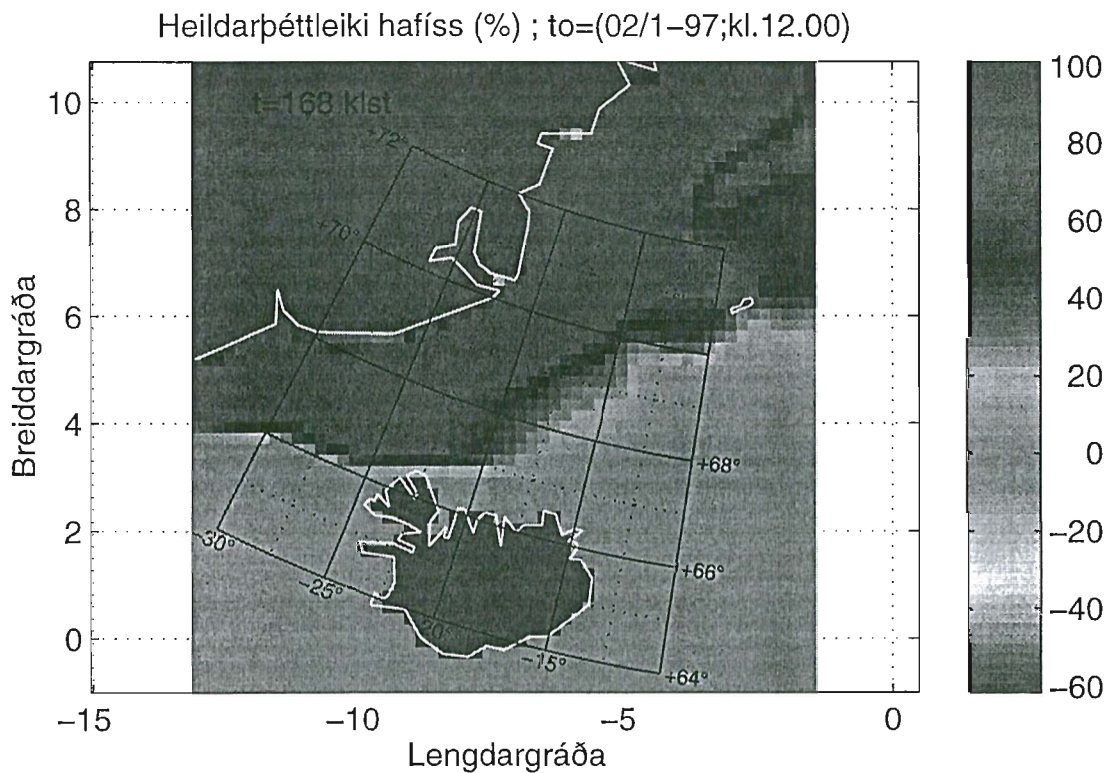
Heildarþéttleiki hafiss (%) ; $t_0=(02/1-97;kl.12.00)$



Mynd 6.7a: Niðurstaða útreikninga fyrir 9. janúar (eftir 168 tímaskref) með hafstrauma.

Ástæðan fyrir mismuni á myndum 6.6 og 6.7a er að öllum líkindum áhrif Irmingerstraumsins (sjá mynd 5.7): Ef litið er á mynd 6.1 sést að tungan við norðvesturströndina vex þegar hún kemur inn á svæði fyrrgreinds straums. Styrkur hafstraumsins sem líkanið notar er í samræmi við fræði (sjá kafla 5.1.5). Samkvæmt viðtali við Eirík Sigurðsson veðurfræðing er eins og fyrrgreindur straumur missi styrk sinn á því tímabili sem þessi keyrsla á sér stað. Ef þetta er rétt notar líkanið of sterkan hafstraum á þessu svæði. Á mynd 6.7b er niðurstaða keyrslna við $t = 168 \text{ klst}$ þegar hafstraumi er sleppt. Í þeirri keyrslu minnkaði fyrrgreind tunga með tíma og hvarf alveg að lokum. Þessi niðurstaða líkist meira þeirri sem er í mynd 6.6.

Með samanburði á myndum 6.7b og 7.1a (sem sýnir upphafsskilyrðið í 7. kafla), sést að yfir heildina er einhver munur á milli raunveruleikans og þess sem mynd 6.7b sýnir. En þessi mynd kemur þó betur út en mynd 6.7a. Athuga ber að einn dagur er milli upphafsskilyrða í mynd 7.1a og niðurstöðu útreikninga á mynd 6.7 sem gefur einhverja skekkju í ofangreindum samanburði.

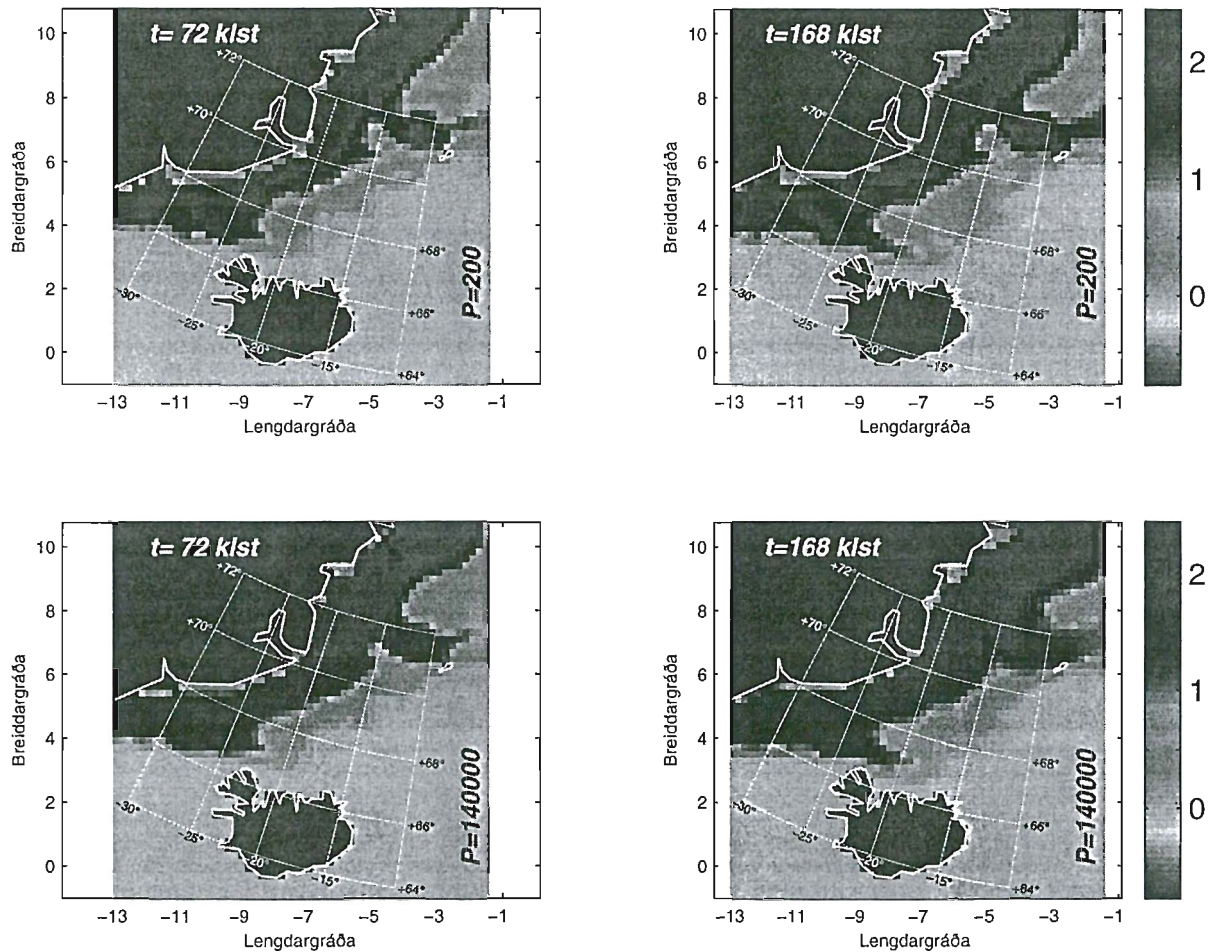


Mynd 6.7b: Niðurstaða útreikninga fyrir 9. janúar (eftir 168 tímaskref) án hafstrauma.

Eins og áður hefur verið nefnt (kafla 1.1.3) er ísþykktarvaxtarhraðinn f í massa-varðveislujöfnu líkansins hafður í réttu hlutfalli við hitastigsmismun milli yfirborðshita hafs og lofts eða með öðrum orðum óháður tíma og rúmi. Þess vegna sleppir höfundur notkun á þessum einföldu varmafræðilegu áhrifum líkansins í öllum keyrslum þessa verkefnis. Hugsanleg er að einhver skekkja komi fram vegna þessa eftir 168 tímaskref. Með þessu kemur þó einn lítil þægindaauki: Í köflum 6, 7 og 8 eru sýndar niðurstöður útreikninga líkansins. Lesandi þarf ekki að velta vöngum yfir áhrifaþætti varmafræðinnar ef hann kemur auga á eitthvert áhugavert fyrirbæri þar.

6.3 Áhrif styrks íssins P^* á keyrslu.

Til að athuga mikilvægi spennutensorsins er hægt að draga úr þrótti hans með því að setja eins lítið gildi á P^* og líkanið leyfir (sjá jöfnur (1.2.8) og (1.2.9)). Minnsta leyfilega gildið er $P^* = 200 \text{ N m}^{-3}$. Mynd 6.8 sýnir niðurstöður keyrslna með slíkt gildi. Ef ekki er annars getið er $P^* = 70000 \text{ N m}^{-3}$ (sjá kafla 5.1.1) og gildir það um flestar keyrslur. Á mynd 6.8 er einnig höfð til samanburðar tvöföldun á því gildi eða $P^* = 140000 \text{ N m}^{-3}$ og er áhugavert að sjá hvað mismunurinn er í raun lítill fyrir svæðið norður af Íslandi.



Mynd 6.8: Mismunur á þykktardreifingu þegar P^* er annars vegar 200 N/m^3 og 140000 N/m^3 hins vegar.

Aðalmismunurinn kemur fram norður, norðvestur og vestur af Jan Mayen. Þar er eins og uppsöfnun á hafis eigi sér stað fyrir $P^* = 140000 \text{ N m}^{-3}$ á því svæði. Er það að öllum líkindum vegna þeirrar tregðu sem spennutensorinn gefur ísnum: Eins og nefnt er í kafla 1.1.5 er jaðarskilyrði massavarðveislujöfnunnar Neuman-skilyrði sem leiðir til stöðugs ísflæðis að norðan. Þessi ísmassi víxlverkar við austurströnd Grænlands og Jan Mayen. Þessari víxlverkun og áhrifum hennar á ísmassann er lýst með spennutensorum sem gefur ísnum meiri tregðu til hreyfingar vegna óbeinna áhrifa frá landmassanum (Grænlandi og Jan Mayen). Þessi tregða leiðir þá til þess að jaðar með ís vex norðan við Jan Mayen, sem leiðir aftur á móti til aukningar í ísflæði vegna fyrrgreindra Neumanskilyrða. Í kafla 8.2 verður rætt um

Þetta aðeins betur og útskýrt hvers vegna ekki ber að fara langt fram yfir sjö daga í keyrslutíma. Með því að draga úr styrk tensorsins minnkar fyrrgreind víxlverkun eða tregða sem skapast af því og minni uppsöfnun á sér stað.

Þar sem hafísinn virðist fá að “leika lausum hala” norður af Íslandi, leiðir það til minni áhrifa spennutensorsins sem skýrir þann litla mismun sem er á $P^* = 200 \text{ Nm}^{-3}$ og $P^* = 140000 \text{ Nm}^{-3}$ í mynd 6.8.

Keyrslutíminn var töluvert mismunandi með tilliti til P^* -gilda: Með $P^* = 200 \text{ Nm}^{-3}$ var líkanið 14 mínútur að keyra, en með $P^* = 140000 \text{ Nm}^{-3}$, eina klukkustund og 29 mínútur (*Intel 586, 133Mhz*). Seinni keyrslutíminn var svipaður þeirri með $P^* = 70000 \text{ Nm}^{-3}$. Með myndir 6.8 og 6.1 má sjá að lítill mismunur er á áhrifum $P^* = 140000 \text{ Nm}^{-3}$ og $P^* = 70000 \text{ Nm}^{-3}$.

6.4 Áhrifum Corioliskrafts sleppt ($f^c = 0$)

Mynd 6.10 sýnir mismun milli keyrslna þegar f^c er sett jafnt og núll annars vegar og með eðlilegt gildi $f^c = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ hins vegar. Með jöfnum (1.2.1) og (1.2.2) verður hreyfijafnan eftirfarandi (öll gildi jöfnunnar eru skilgreind í kafla 1.2.2):

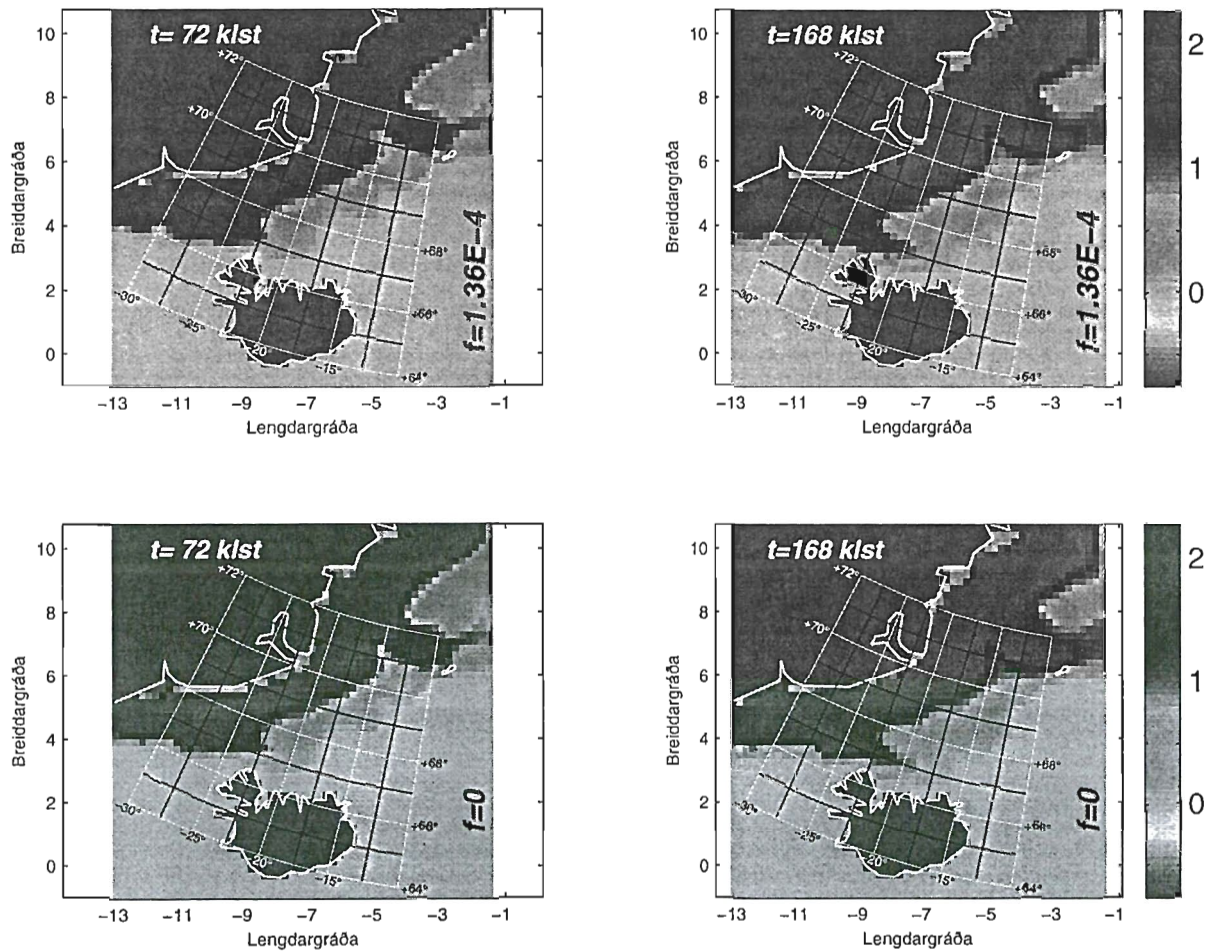
$$\rho_{ice} H \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho_{ice} H v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\rho_{ice} H f^c \varepsilon_{i3j} v_j + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho_{ice} H g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad (6.4.1)$$

Ritum $v_i = \{V\} \tilde{v}_i$, $u_i^{wat} = \{V\} \tilde{u}_i^{wat}$, $u_i^{air} = \{U\} \tilde{u}_i$, $t = \{T\} \tilde{t}$, $x_i = \{L\} \tilde{x}_i$ og $H = \{H\} \tilde{H}$, þar sem \tilde{v}_i , \tilde{u}_i , \tilde{t} , \tilde{x}_i og \tilde{H} eru einingalausar stærðir með stærðargráðuna einn. $\{V\} \sim 0.1 \text{ m s}^{-1}$, $\{U\} \sim 10 \text{ m s}^{-1}$, $\{L\} \sim 10^6 \text{ m}$ (stærðargráða kerfis), $g \{ \partial \xi / \partial x_i \} \sim f^c \{V\}$ (samanber jöfnu (1.2.6)), $\{H\} \sim 1 \text{ m}$ og $\{T\} \sim \{L\} / \{V\} \sim 10^6 \text{ s}$ er stærðargráðan á tilsvarende stærðum. Með innsetningu verður hreyfijafnan nú:

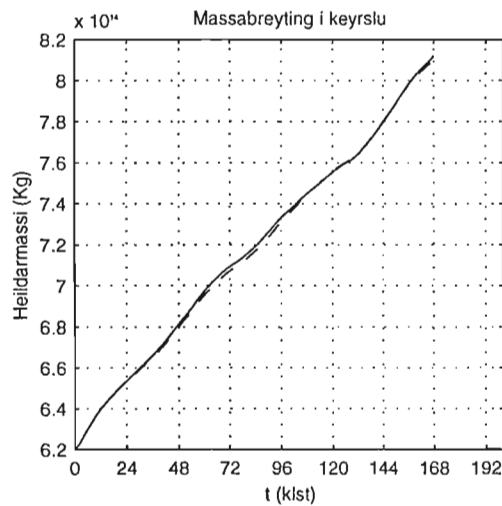
$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho_{ice} \{H\} \{V\}}{\{T\}} \right] \tilde{H} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{t}} + \left[\frac{\rho_{ice} \{H\} \{V\}^2}{\{L\}} \right] \tilde{H} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = \\ & = - \left[\rho_{ice} \{H\} \{V\} f^c \right] \tilde{H} \varepsilon_{i3j} \tilde{v}_j + \left[\frac{P^* \{H\}^2}{\{L\}} \right] \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ji}}{\partial \tilde{x}_j} + \\ & + \left[\rho_{air} C_{air} \{U\}^2 \right] \tilde{v}_i^{air} + \left[\rho_{wat} C_{wat} \{V\}^2 \right] \tilde{v}_i^{wat} - \left[\rho_{ice} \{H\} \{V\} f^c \right] \tilde{H} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}_i} \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Með ofangreindum stærðargráðagildum fást meðaláhrif hvers liðar fyrir sig, yfir allt kerfið:

$A \sim 10^{-5} \text{ Nm}^{-2}$, $B \sim 10^{-5} \text{ Nm}^{-2}$, $C \sim 10^{-2} \text{ Nm}^{-2}$, $D \sim 10^{-1} \text{ Nm}^{-2}$, $E \sim 10^{-1} \text{ Nm}^{-2}$, $F \sim 10^{-1} \text{ Nm}^{-2}$, $G \sim 10^{-2} \text{ Nm}^{-2}$. Þar sem $C < D$ eru meðaláhrif Corioliskraftsins minni en meðaláhrif spennutensorsins. Þetta sést greinilega með samanburði á mynd 6.8 og mynd 6.9.



Mynd 6.9 : Mismunur á þykktardreifingu hafís með og án áhrifa Coriolis-kraftsins fyrir 5. janúar (72 klst) og 9. janúar (168 klst) . Efri myndirnar eru teknar frá mynd 6.1.



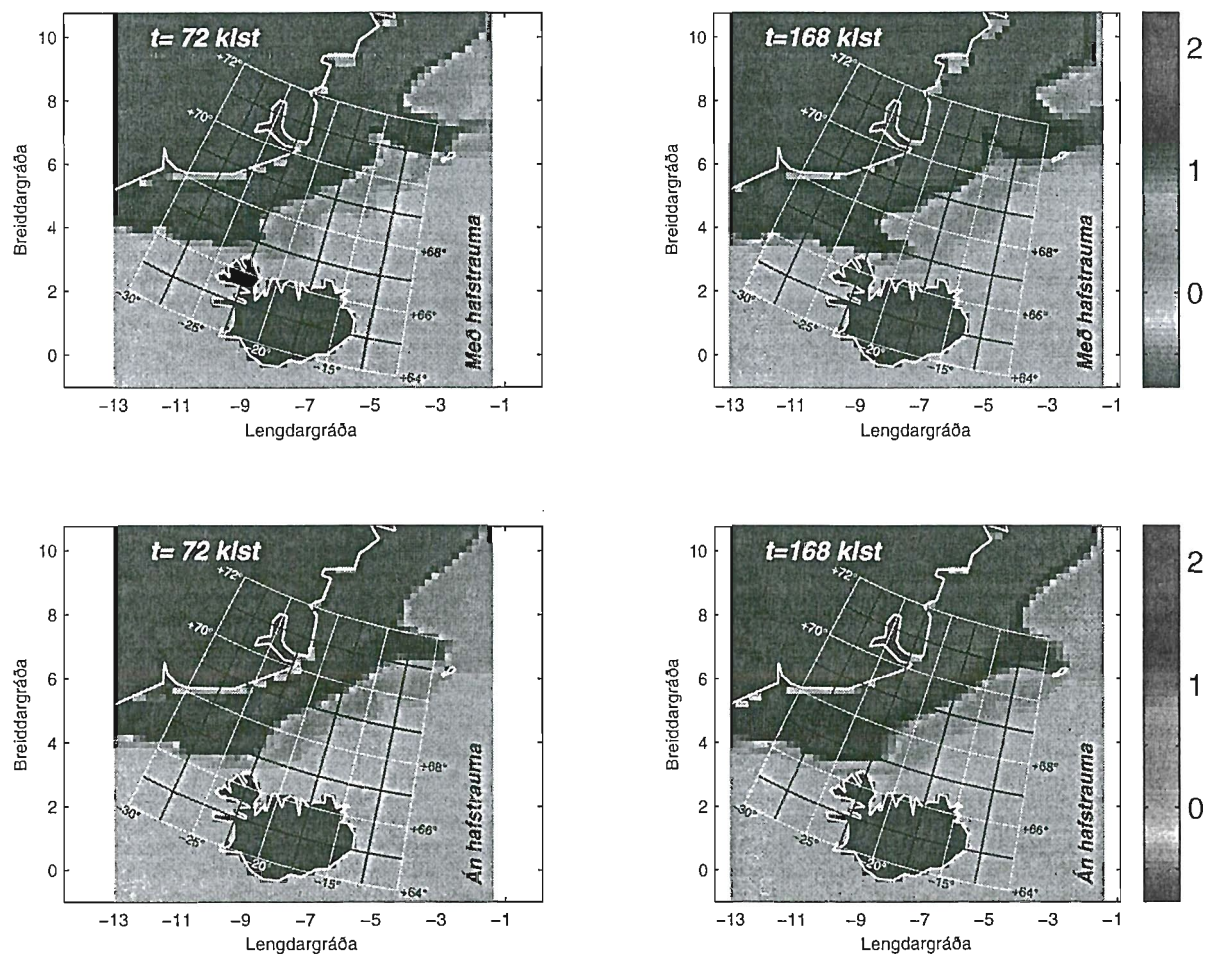
Mynd 6.10 : Mismunur á massabreytingu kerfisins þegar f^c er með eðlilegt gildi (heila línun) og þegar $f^c = 0 \text{ rad s}^{-1}$ (sjá mynd 6.12 til samanburðar).

Það sem einkennilegt er við mynd 6.9 er það, að varla er nokkur mismunur á $f^c = 1.38 \cdot 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$ og $f^c = 0 \text{ rad s}^{-1}$. Þetta sést betur á mynd 6.10 en þar er graf sem sýnir mismun á massabreytingu kerfisins þegar f^c er með eðlilegt gildi (heila línan) og þegar $f^c = 0 \text{ rad s}^{-1}$. Línurnar eru nokkurn veginn samfallandi (sjá mynd 6.12 í kafla 6.5 til samanburðar).

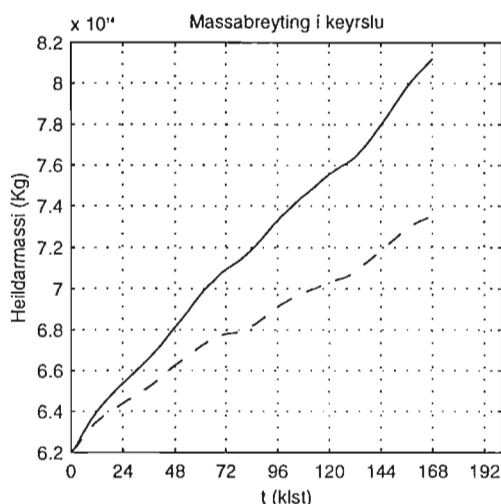
6.5 Áhrifum hafstrauma sleppt

Með stærðargráðagreiningunni sem gerð er í jöfnu (6.4.2) sést að áhrif hafstrauma eru mun meiri en áhrif Corioliskraftsins. Þetta er í samræmi við samanburð á mynd 6.10 og mynd 6.12, en þar sést að massabreytingin verður töluvert frábrugðin hinu eðlilega ef hafstraumum er sleppt (mynd 6.12). Slíkt skeður ekki ef Corioliskrafti er sleppt (mynd 6.10).

Með tilliti til dreifingar á hafís sést af mynd 6.11, að fyrir Norður Íslandshaf er engin verulegur munur komin á fyrir en ísinn kemur inn á svæði Irmingerstraumsins, en um það var rætt í kafla 6.2.



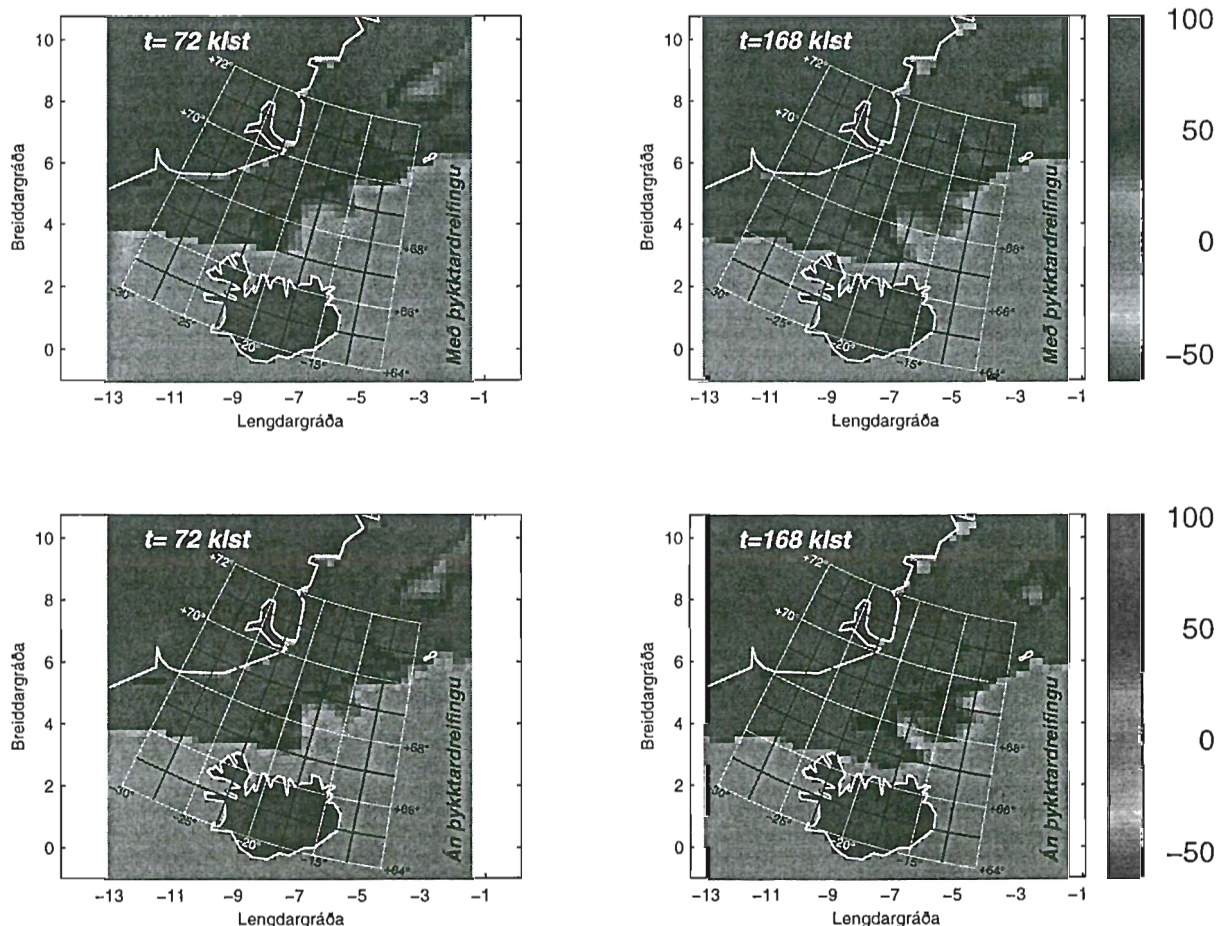
Mynd 6.11: Mismunur á þykktardreifingu hafíss með og án hafstrauma fyrir 5. janúar (72 klst) og 9. janúar (168 klst). Efri myndirnar eru teknar frá mynd 6.1.



Mynd 6.12 : Mismunur á massabreytingu kerfisins með og án hafstrauma. Heila línan er með hafstraum (sjá mynd 6.10 til samanburðar).

6.6 Engin þykktardreifing við t=0

Ef engar upplýsingar liggja fyrir um þykktardreifingu, heldur aðeins hvar jaðarinn er, má setja eina ísþykkt yfir allt kerfið sem upphafsskilyrði.

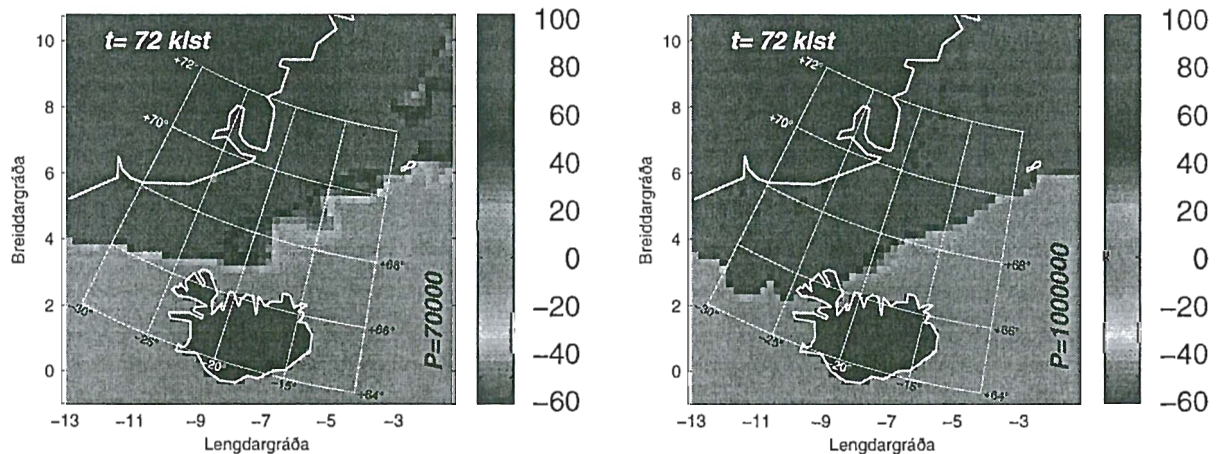


Mynd 6.13 : Mismunur á þéttleikadreifingu hafíss með og án þykktardreifingar við t=0 fyrir 5. janúar (72 klst) og 9. janúar (168 klst).

Ísþykktin, sem var valin í upphafsskilyrðinu, er fyrstaárs meðal-þykkur ís: $h_{3-1/2} = 0,7 m \wedge h \in [0,45 m, 1,2 m]$ (sjá kafla 1.1.4). Áhugavert er að líta á hvernig niðurstaðan verður þá frábrugðin fyrri keyrslu. Mynd 6.13 sýnir slíkan mismun. Það er mjög lítið um þessa keyrslu að segja nema hversu lítill mismunur er til staðar bæði norður af Íslandi og norður af Jan Mayen. Sams konar samanburður er einnig gerður í kafla 7.6 og 8.6.

6.7 Seigt flæði

Eins og nefnt er í kafla 4.3 er $\Delta = \dot{\gamma}$ ef $e = 1$ og því má gera ráð fyrir $\Delta \sim \dot{\gamma}$. Nú gildir $\dot{\gamma} = (2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} \sim |\partial u_i / \partial x_j| \sim \{|V\} / \Delta x$, þar sem $\{V\}$ er stærðargráðan á hraða hafíss og Δx er stærðargráða griddsellunnar $\sim 10^4 m$. Í ofangreindri keyrslu er $DMIN = 10^{-9} s^{-1}$, sem gefur þá $\{|V\} \sim \Delta x \cdot DMIN \sim 10^{-5} m/s$. Þetta leiðir til þess að ef hafísinn á að geta brugðist við ytra- og innra álagi sem seigkennt efni má hraði hans ekki fara yfir stærðargráðuna $10^{-5} m s^{-1}$. Ef skoðuð er mynd 6.1 sést að í flestum tilfellum er færslan milli 20 til 200km yfir 168 klukkustundir. Það gefur íshraða frá $\{|V\} \sim 0.1 km/klst$ til $1 km/klst$ (~ 1 til $10 cm/s$). Ef reiknað er til baka samsvarar þessi hraði $\Delta \sim 10^{-6} s^{-1}$ til $10^{-5} s^{-1}$. Þetta er þó nokkrum stærðargráðum yfir $DMIN = 10^{-9} s^{-1}$, þannig að ísinn er yfirleitt í flotkenndu ástandi. Þar sem yfirleitt gildir að $\Delta \sim 10^{-6} s^{-1}$ til $10^{-5} s^{-1}$, fæst með því að setja $DMIN = 10^{-4} s^{-1}$ að hafísinn er yfirleitt í seigkenndu ástandi.



Mynd 6.14 : Þéttleikadreifing (í %) þegar hafísinn hegðar sér sem seigt efni ($t=72 klst$).

Gert er ráð fyrir að $P \sim P^*$ samanber jöfnu (1.2.9). Þetta er gróf nálgun því:

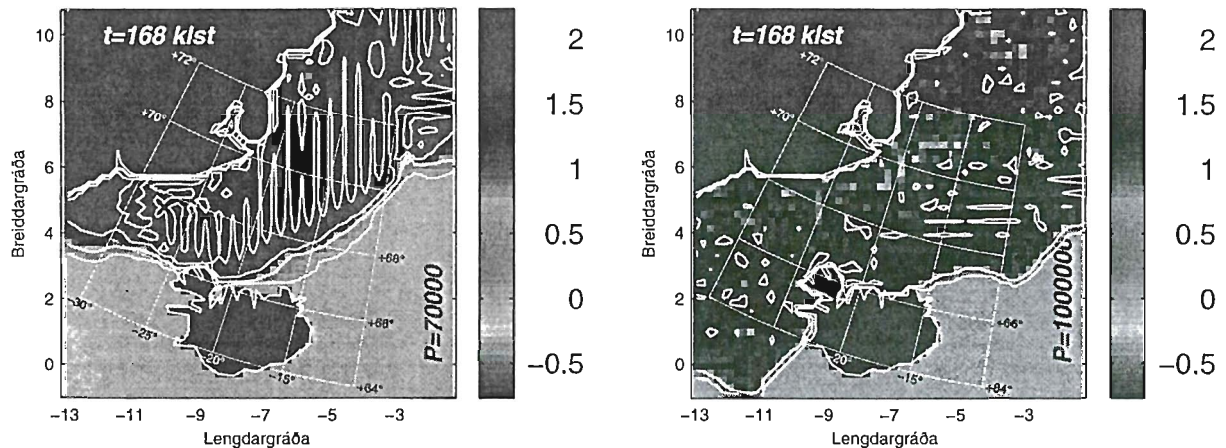
$$\sum_{l=1}^{TMAX} h_{l-1/2} A_l \in [0, \langle h^2 \rangle]$$

Með $DMIN = 10^{-9} s^{-1}$ þá er $\zeta \sim P / (2 \cdot DMIN) = 7 \cdot 10^4 N \cdot m^{-1} / (2 \cdot 10^{-9} s^{-1}) = 3.5 \cdot 10^{13} Pa \cdot s \cdot m$ (sjá jöfnu (4.3.7)). Ef ætlunin er að viðhalda sömu stærðargráðunni á ζ fyrir seigkennt ástand ($DMIN = 10^{-4} s^{-1}$), þá verður $P^* = 7 \cdot 10^9 N m^{-3}$. Þetta er mjög gróf áætlun út af veikleika $P \sim P^*$ nálgunarinnar. Mergur málsins er að auka ber gildið á P^* ef ætlunin er að keyra líkanið með samsvarandi gildi á ζ og η eins áður hefur verið gert. Líkanið tekur ekki við svo háu gildi sem $P^* = 7 \cdot 10^9 N m^{-3}$, þannig að notast var við $P^* = 10^6 N m^{-3}$.

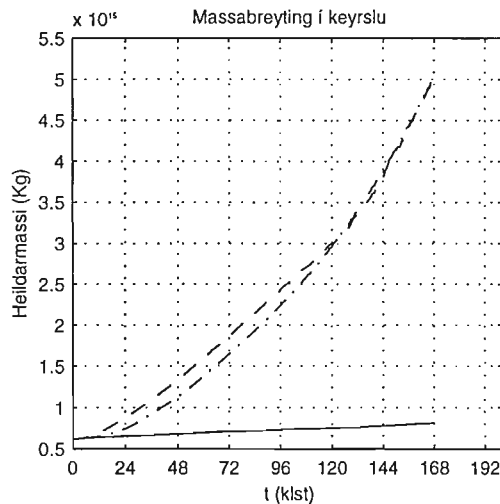
Mynd 6.14 sýnir samanburð milli $P^* = 70000 \text{ N m}^{-3}$ og $P^* = 10^6 \text{ N m}^{-3}$ með $DMIN = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (til að viðhalda seigu ástandi) eftir 72 tíma keyrslu.

Nokkuð áhugavert fyrirbæri kom upp með $P^* = 70000 \text{ N m}^{-3}$ -tilfellinu. Standandi tímaóháðar bylgjur með bylgjulengdinni $2 \cdot \Delta x$ byrjuðu að myndast og jókst fjöldi þeirra með tíma. Bylgjuhæð þeirra virtist ekki breytast mikið með tíma (sem er ekki óeðlilegt því massavarðveislujafnan (2.2.6) er línuleg). Myndin að neðan sýnir þetta fyrirbæri. Þetta er eiginleiki hyperbólskra jafna en spurningin er hvers vegna þessi hegðun kemur fram. Hugsanleg ástæða er að með seigkenndu ástandi er flutningur hafíss meiri sem leiðir til stærri Peclet tölu (sjá kafla (5.2.2)). Það leiðir aftur á móti til þess að áhrifamáttur dreifiliðanna í jöfnu (2.2.6) verður minni. Svipaða hegðun mátti sjá fyrir $P^* = 10^6 \text{ N m}^{-3}$ keyrsluna en þar voru sveiflurnar minni, tímaháðar og staðsetningin tilviljunarkennd.

Það kom höfundu á óvart að hafísinn breiddist út mun meira fyrir $P^* = 10^6 \text{ N m}^{-3}$ en fyrir $P^* = 70000 \text{ N m}^{-3}$, því með stærra gildi á P^* ætti ísinn að vera mun seigari og flutningur á hafís þar af leiðandi mun minni. Er ekki ólíklegt að með fyrra P^* -gildinu sé keyrslan komin út fyrir það sem líkanið er hannað fyrir.

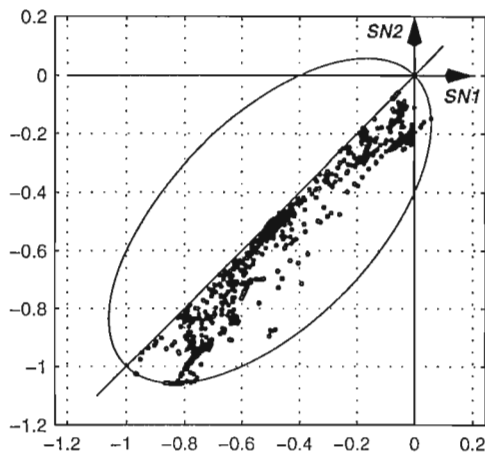


Mynd 6.15 : Þykktardreifing þegar hafísinn hegðar sér sem seigt efni ($t=168$ klst).

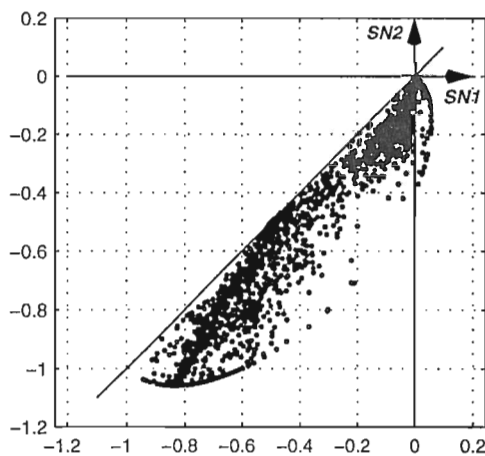


Mynd 6.16 : Mismunur á massabreytingu kerfisins þegar P^* er 70000 N/m^3 (--), 1000000 N/m^3 (-.-). Heila línan er frá venjulegri keyrslu (sjá mynd 6.1).

Myndir 6.17 og 6.18 sýna normuð eigingildi þessara tveggja keyrslna. Þar sést vel að hafísinn er yfirleitt í seigkendu ástandi.



Mynd 6.17 : Normuð eigingildi fyrir $DMIN=1E-4s^{-1}$ og $P^* = 70000 N/m^3$ (myndin sýnir 3864 þör af eigingildum).



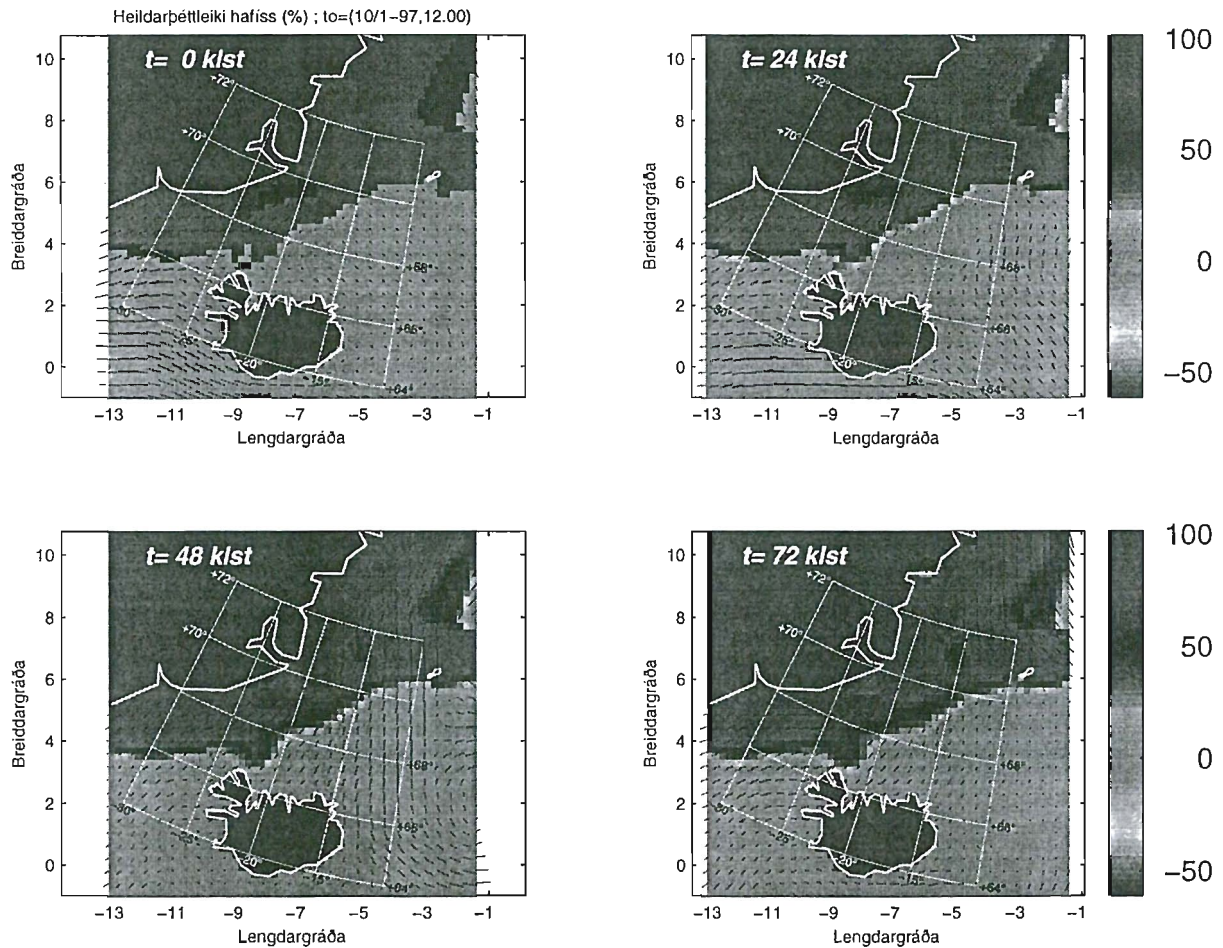
Mynd 6.18 : Normuð eigingildi fyrir $DMIN=1E-4s^{-1}$ og $P^* = 1000000 N/m^3$ (3864 þör af eigingildum).

Það fer ekki milli mála út frá myndum 6.14, 6.15 og 6.16 að keyrslurnar eru óraunhæfar, enda eru þær gerðar hér aðeins í tilraunaskyni.

7. KEYSLSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 10. JANÚAR 1997

7.1 Venjuleg keyrsla

Mynd 7.1 sýnir niðurstöðu keyrslna fyrir upphafsskilyrðið 10. janúar. Eins og áður er keyrt sjö daga fram í tímann eða 168 klukkustundir og sýnir hver mynd niðurstöðu sem samsvarar klukkan 12 á hádegi. Öll gildi eru eins og það sem gildir fyrir kafla 6.1 og eru þau endurtekin í töflu 7.1 til þæginda.



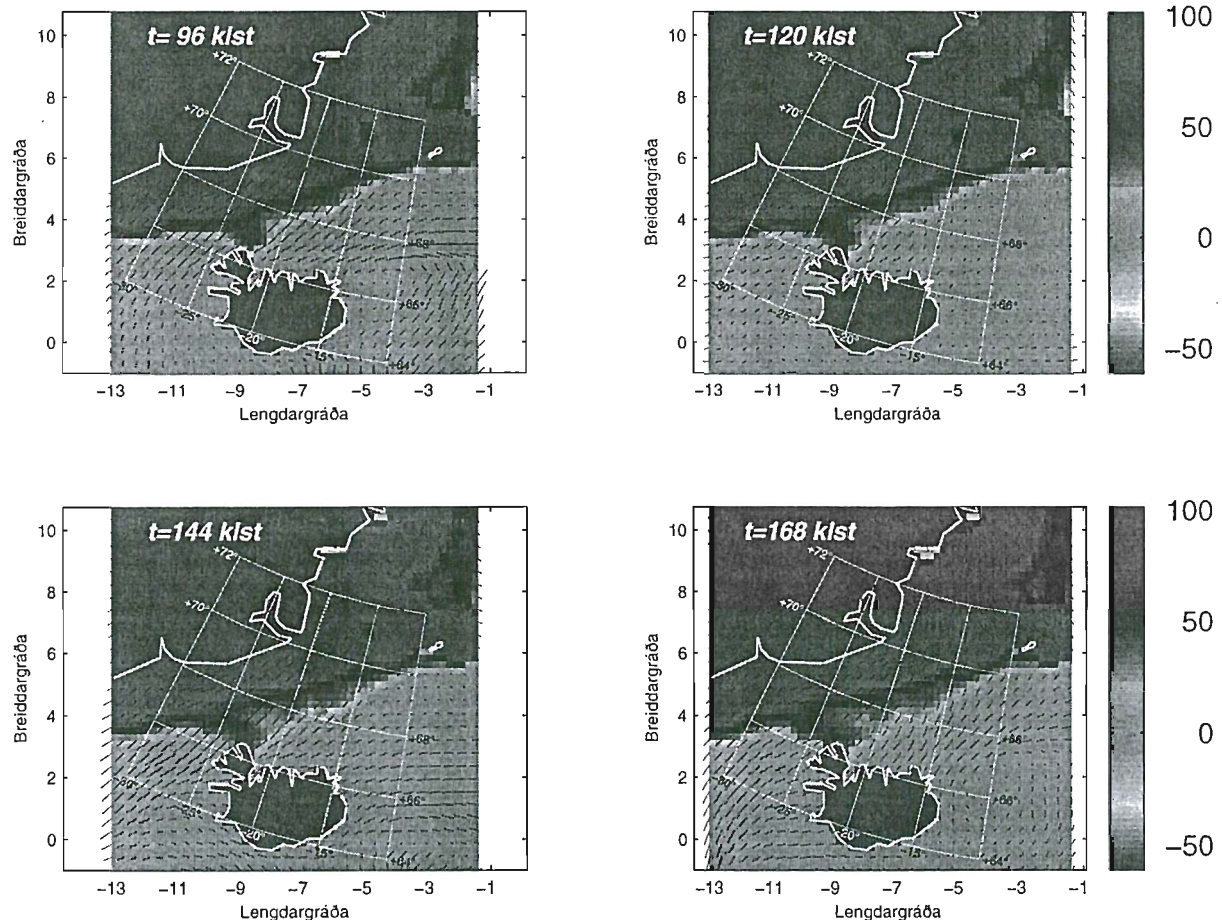
Mynd 7.1a: Fyrri hluti keyrslunnar fyrir upphafsskilyrðið 10. janúar. Sýnd er niðurstaða fyrir 11. (24klst), 12. (48klst) og 13. janúar (72klst), klukkan 12.00. Seinni hlutinn er í mynd 7.1b.

Fjöldi tímaskrefa:	168	Skerspennustuðull lofts: $C_{air} = 2 \cdot 10^{-3}$
Stærð tímaskrefs:	$\Delta t = 3600 s$	Skerspennustuðull hafs: $C_{wat} = 6 \cdot 10^{-3}$
Stærð griddsellu:	$\Delta x = 23376,6 km$	Sveigjuhorn lofts: $\theta_{air} = 0^\circ$
Eðlismassi hafíss:	$\rho_{ice} = 910 kg m^{-3}$	Sveigjuhorn hafs: $\theta_{wat} = 20^\circ$
Eðlismassi lofts:	$\rho_{air} = 1,3 kg m^{-3}$	Ísstyrkur: $P^* = 70000 N m^{-3}$
Eðlismassi hafs:	$\rho_{wat} = 1030 kg m^{-3}$	$DMIN$ (sjá kafla 4.3): $10^{-9} s^{-1}$
Gildi Coriolis:	$f^c = 1,36 \cdot 10^{-4} rad s^{-1}$	

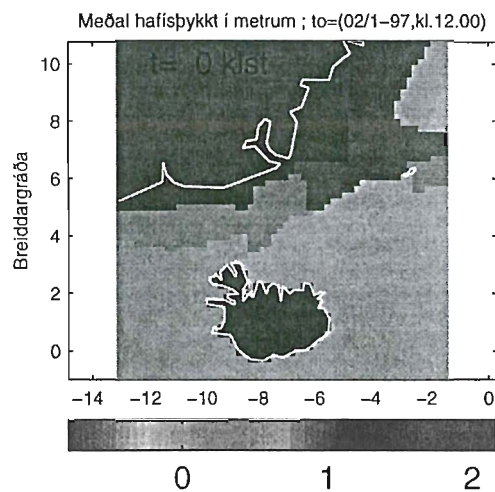
Tafla 7.1: Gildi sem eru notuð í keyrslunni

Eins og með mynd 6.1 eru teiknaðar línur sem sýna stefnu og hlutfallslega heildarskerspennu τ_i frá haf- og loftstraumum samkvæmt jöfnu (6.1.1).

Heppilegast er að fara kerfisbundið í gegnum hverja keyrslu þannig að ekki er æskilegt að breyta þessum gildum frá því sem gildir í kafla 6.1. Eins og í kafla 6, er farið markvisst í hinar ýmsu breytingar.



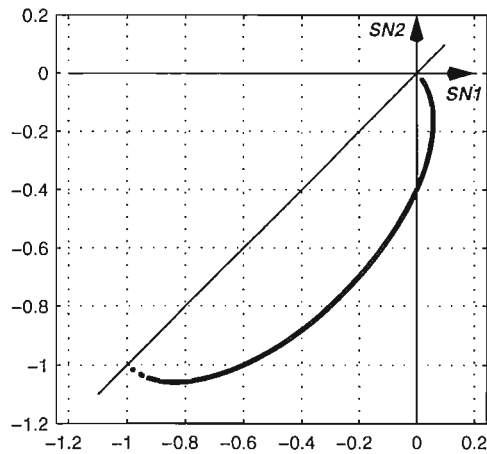
Mynd 7.1b: Niðurstaða fyrir 14. (96klst), 15. (120klst), 16. (144klst) og 17. janúar (168klst), klukkan 12.00.



Mynd 7.2: Þykktardreifing við $t=0$ klst.

Myndir 6.1 og 7.1 eru ólíkar að því leyti að sú fyrri lýsir meðalþykktinni sem fall af tíma, en sú seinni lýsir heildarþéttleika sem fall af tíma. Þetta er gert af því að ísinn er frekar þunnur við Vestfirði þannig að hann greinist ekki eins vel og í kafla 6. Þetta sést með mynd 7.2 en þar er þykktardreifing hafíss við $t = 0 \text{ klst}$.

Mynd 7.3 sýnir normuð eigingildi stresstensorsins fyrir ofangreinda keyrslu samkvæmt jöfnu (6.1.2). Eins og í kafla 6 eru eigingildi hundruðustu hvernar griddsellu tekin fyrir öll tímaskref.

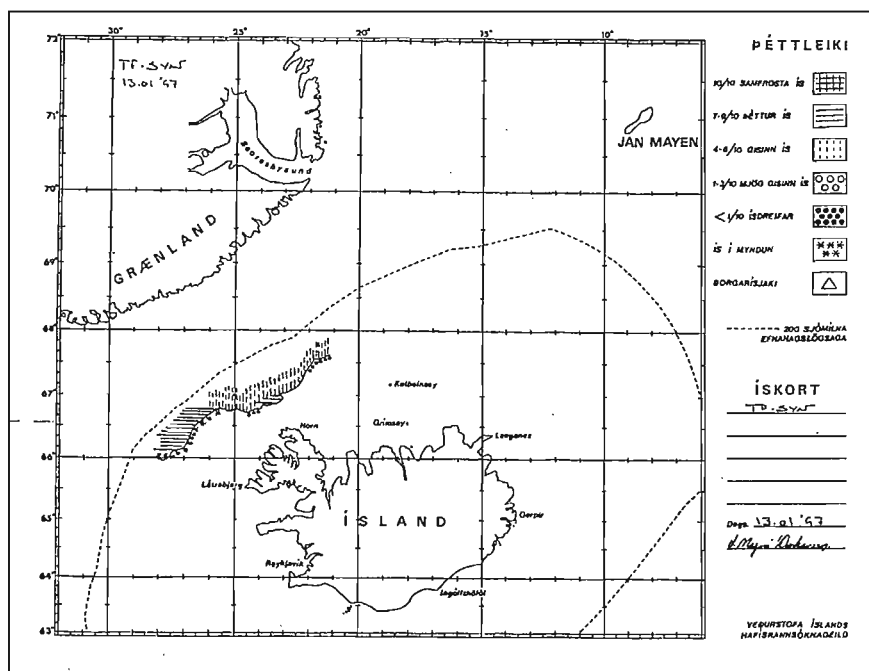


Mynd 7.3: Normuð eigingildi samkvæmt jöfnu (6.1.2).

Þar sést (sjá kafla 6.7) að hafísinn er yfirleitt í flotkenndu ástandi og er það í samræmi við kafla 6.7.

7.2 Samanburður við raunveruleikann

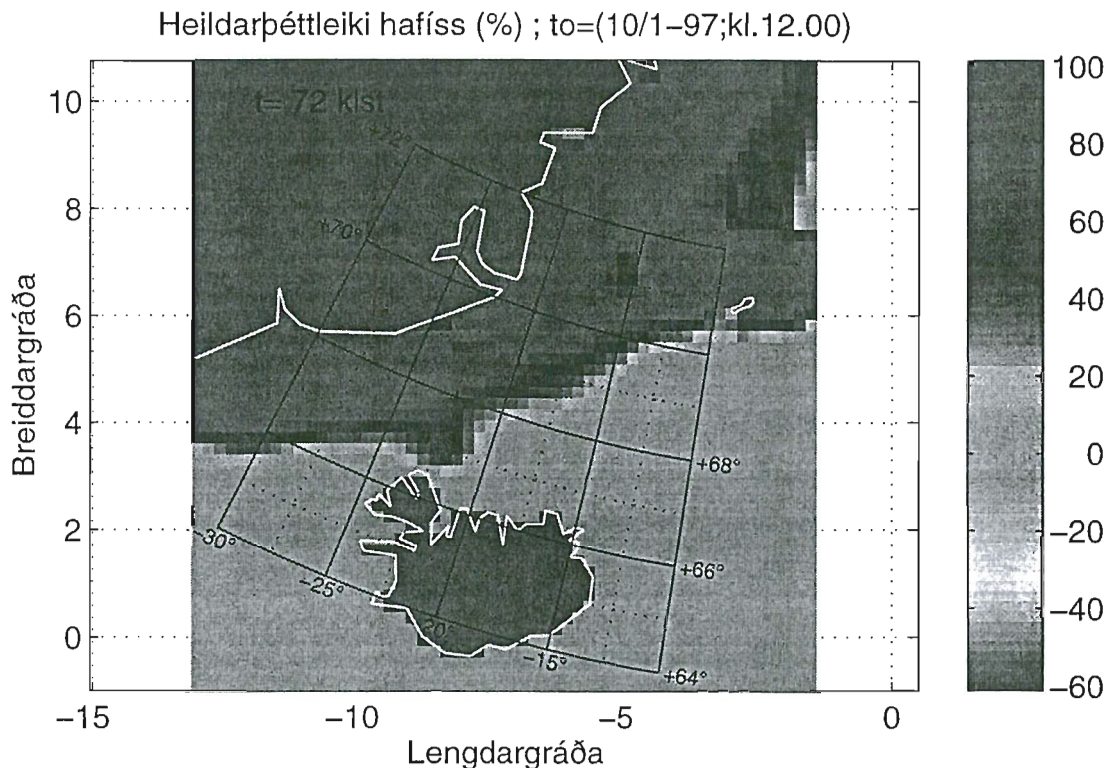
Mynd 7.4 sýnir ískort frá Landhelgisgæslu Íslands 13. janúar 1997. Mynd 7.5 sýnir niðurstöðu líkansins fyrir sama tíma. Bæði kortin sýna heildarþéttleika hafíss, eins og gert er í kafla 6.2.



Mynd 7.4: Athugun frá Landhelgisgæslu Íslands 13. janúar.

Myndir 7.4 og 7.5 sýna að líkanið gefur ekki eins góða niðurstöðu (eftir 72 tímaskref) fyrir norðan Vestfirði eins og kom fram í kafla 6.2. Höfundur reyndi að breyta gildum líkansins (innan vissra marka) til að losna við tunguna nálægt Horni, en án árangurs þar sem hún var viðloðandi alla keyrsluna.

Með samanburði við ískort frá Veðurstofu Noregs kemur í ljós að keyrslan er ekki slæm á heildina litið. Ekki er hægt að gera samanburð lengra fram í tímann vegna skorts á marktækum upplýsingum.

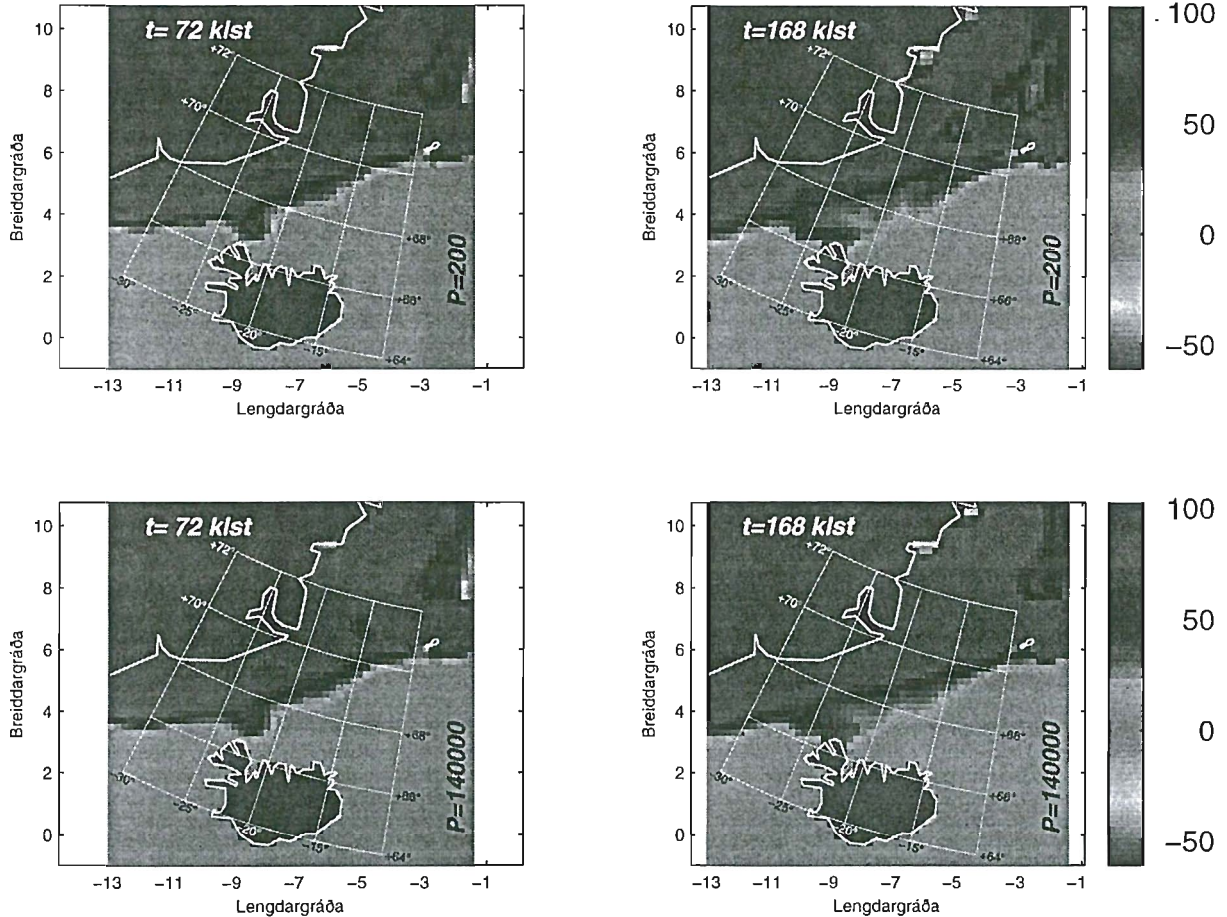


Mynd 7.5: Niðurstaða útreikninga fyrir 13. janúar (eftir 72 tímaskref).

7.3 Áhrif styrks íssins P^* á keyrslu.

Eins og í kafla 6.3 er mikilvægi spennutensorsins athugað með því að breyta gildi á P^* (sjá jöfnur (1.2.8) og (1.2.9)). Dregið er úr styrk spennutensorsins með því að láta minnsta leyfilega gildið í líkaninu vera $P^* = 200 N m^{-3}$. Mynd 7.7 sýnir niðurstöðu keyrslna með slíku gildi. Í þessari mynd er einnig höfð til samanburðar tvöföldun á venjulegu gildi eða $P^* = 140000 N m^{-3}$ (það sama er gert í kafla 6.3). Hér kemur samsvarandi niðurstaða og í kafla 6.3: Lítil mismunur er fyrir svæðið norður af Íslandi. Aðalmismunurinn kemur fram norður-, norðvestur og vestur af Jan Mayen.

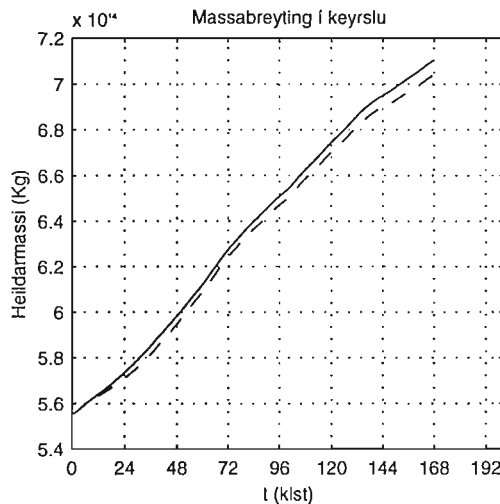
Telur höfundur, eins og í kafla 6.3, að mismunurinn stafi af meiri víxlverkunum (lýst með spennutensorum) milli hafíss og austurstrandar Grænlands og Jan Mayen annars vegar, en milli suðurstrandar Grænlands og Íslands hins vegar, því að ísmassinn á Íslandshafi fær nokkurn veginn að leika lausum hala. Það leiðir til þess að þar skiptir ekki eins miklu máli hvort $P^* = 140000 N m^{-3}$ eða $P^* = 200 N m^{-3}$ fyrir Íslandshaf.



Mynd 7.6: Mismunur á þykktardreifingu þegar P^* er annars vegar 200 N/m^3 og 140000 N/m^3 hins vegar.

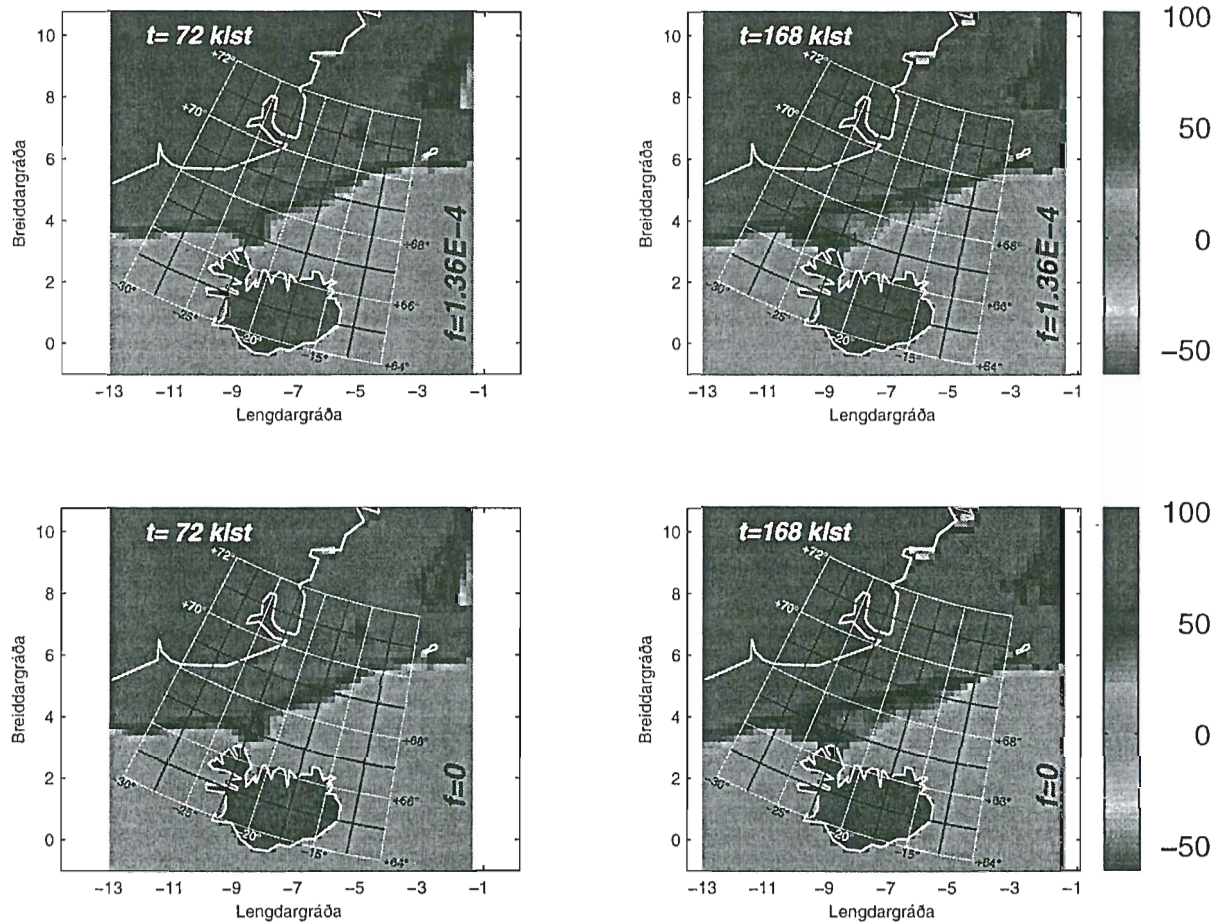
7.4 Áhrifum Corioliskrafts sleppt ($f^c = 0$)

Mynd 6.10 sýnir mismun milli keyrslna þegar f^c er sett jafnt núlli annars vegar og haft með eðlilegu gildi $f^c = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$ hins vegar.



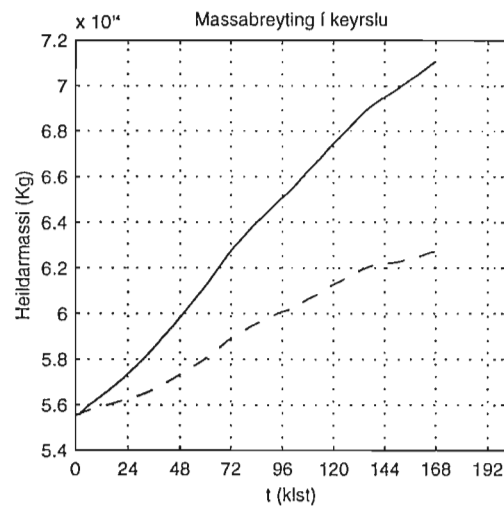
Mynd 7.7: Mismunur á massabreytingu kerfisins þegar f^c er með eðlilegt gildi (heila línan) og þegar $f^c = 0$.

Í mynd 7.8 er varla sjáanlegur munur milli þessara keyrslna, en með mynd 7.7 sést að munurinn er þó aðeins meiri en það sem gildir í kafla 6.4.



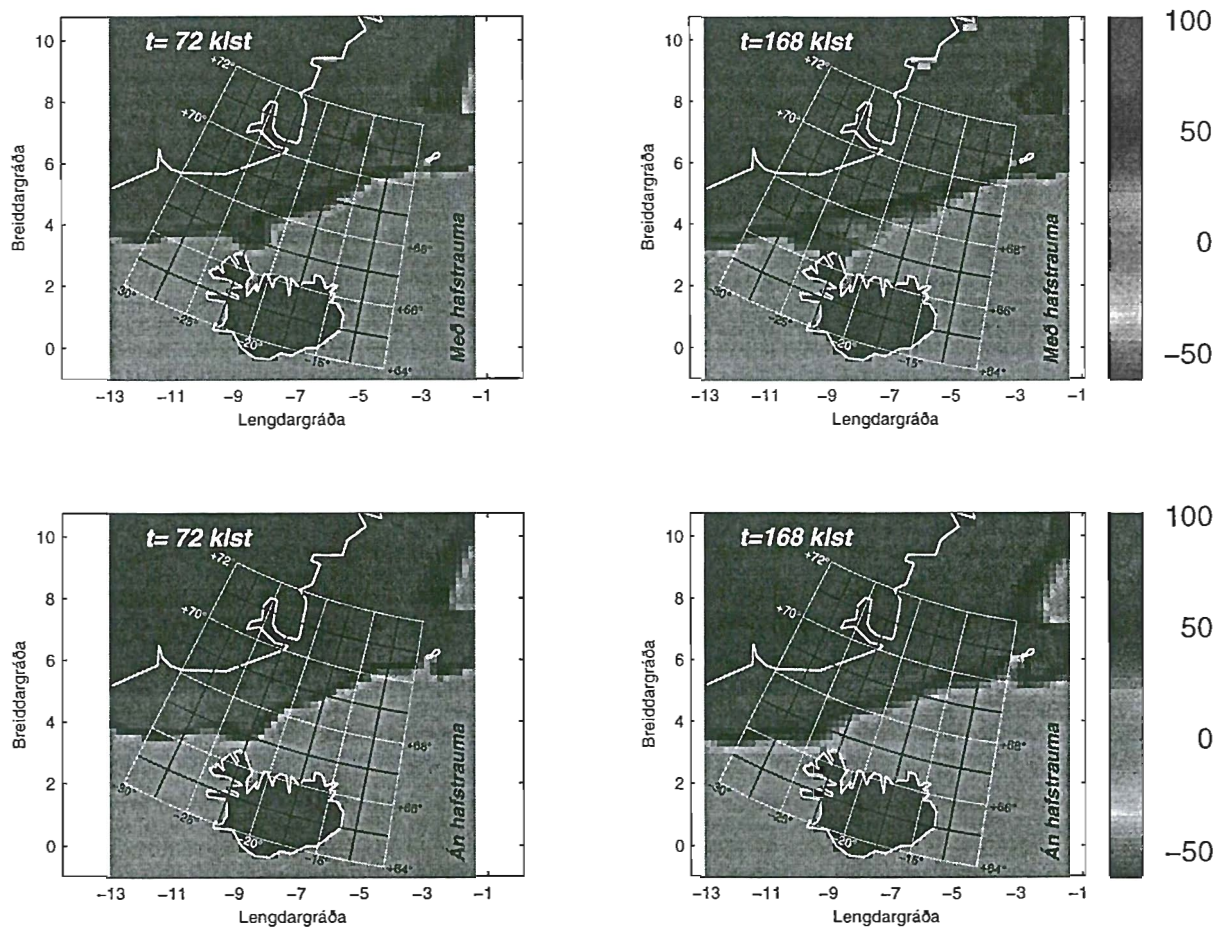
Mynd 7.8: Mismunur á þykktardreifingu hafss með og án áhrifa Coriolis-kraftsins fyrir 13. janúar (72 klst) og 17. janúar (168 klst). Efri myndirnar eru teknar frá mynd 7.1.

7.5 Áhrifum hafstrauma sleppt



Mynd 7.9: Mismunur á massabreytingu kerfisins með og án hafstrauma. Heila línan er með hafstrauma.

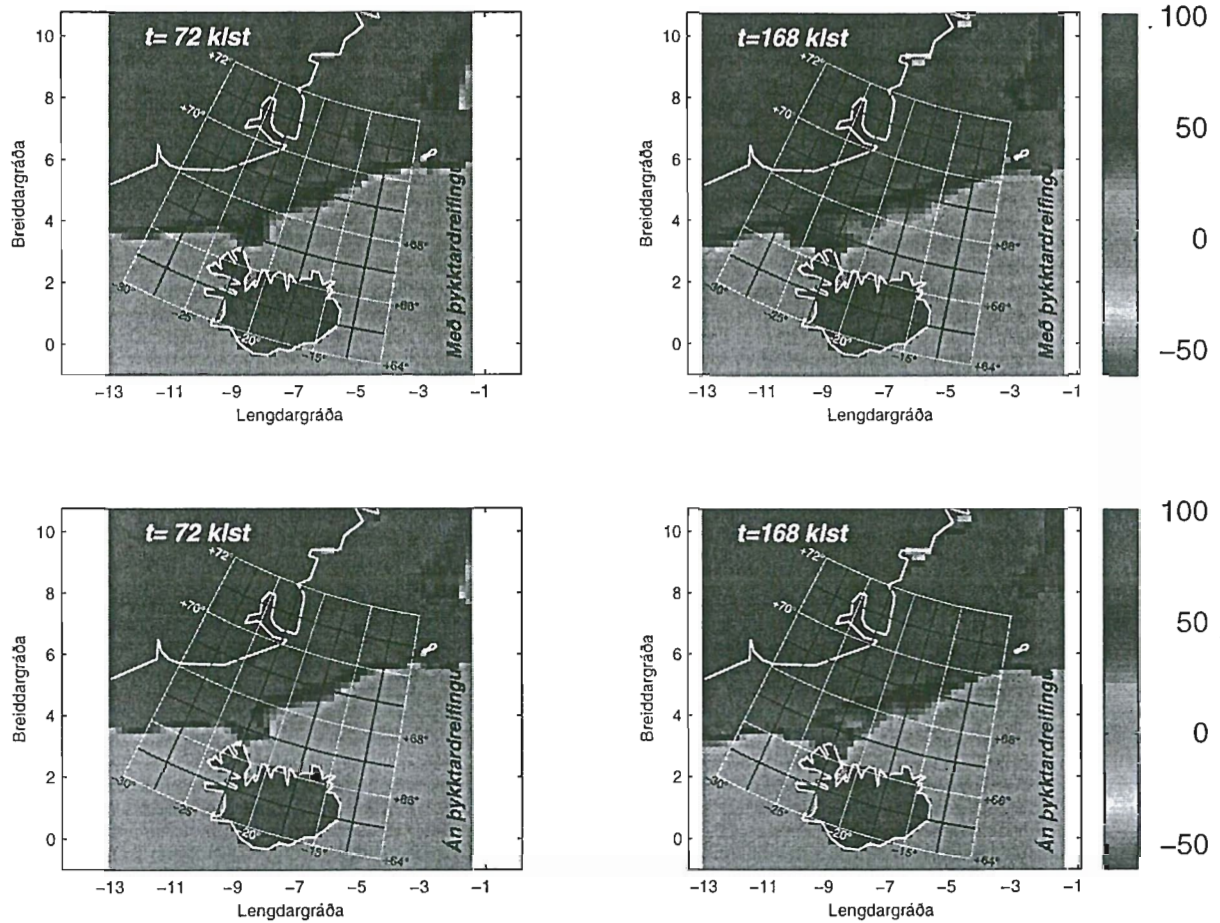
Með tilliti til dreifingar á hafís sést á mynd 7.10, að fyrir Íslandshaf hverfur fyrrgreind tunga að lokum (sjá kafla 7.1), þegar hafstraumi er sleppt. Tungan í mynd 6.1a er í meginatriðum afleiðing átaka milli vinda og Irmingerstraumsins. Þegar hafstraumurinn er fjarlægður úr líkaninu fær vindurinn að ráða ríkjum. Tungan flyst vestur með vindinum, og samlagast meginísnum þar. Þessi áhrif Irmingerstraumsins eru í samræmi við kafla 6.5, en þar fékkst að töluverður mismunur komst á um leið og hafísinn fór inn á svæði þessa straums.



Mynd 7.10: Mismunur á þykktardreifingu hafíss með og án hafstrauma fyrir 13. janúar (72 klst) og 17. janúar (168 klst). Efri myndirnar eru teknar frá mynd 7.1.

7.6 Engin þykktardreifing við $t=0$

Ef gert er ráð fyrir að engar upplýsingar liggi fyrir um þykktardreifingu, heldur aðeins um staðsetningu jaðarsins, má setja eina ísþykkt yfir allt kerfið sem upphafsskilyrði. Ísþykktin sem var valin í upphafsskilyrðinu er fyrstaárs meðal-þykkur ís: $h_{3-1/2} = 0,7m \wedge h \in [0,45m, 1,2m]$ (sjá kafla 1.1.4). Í kafla 6.6 kom fram að mjög lítil munur var í þéttleikabreytingu. Með mynd 7.11 sést að það sama gildir hér. Þetta á við eftir 72 tímaskref en eftir 168 tímaskref er mismunurinn orðinn verulegur norðan við Ísland með tilliti til þéttleika en ísjaðarinn er nokkurn veginn á sama stað.

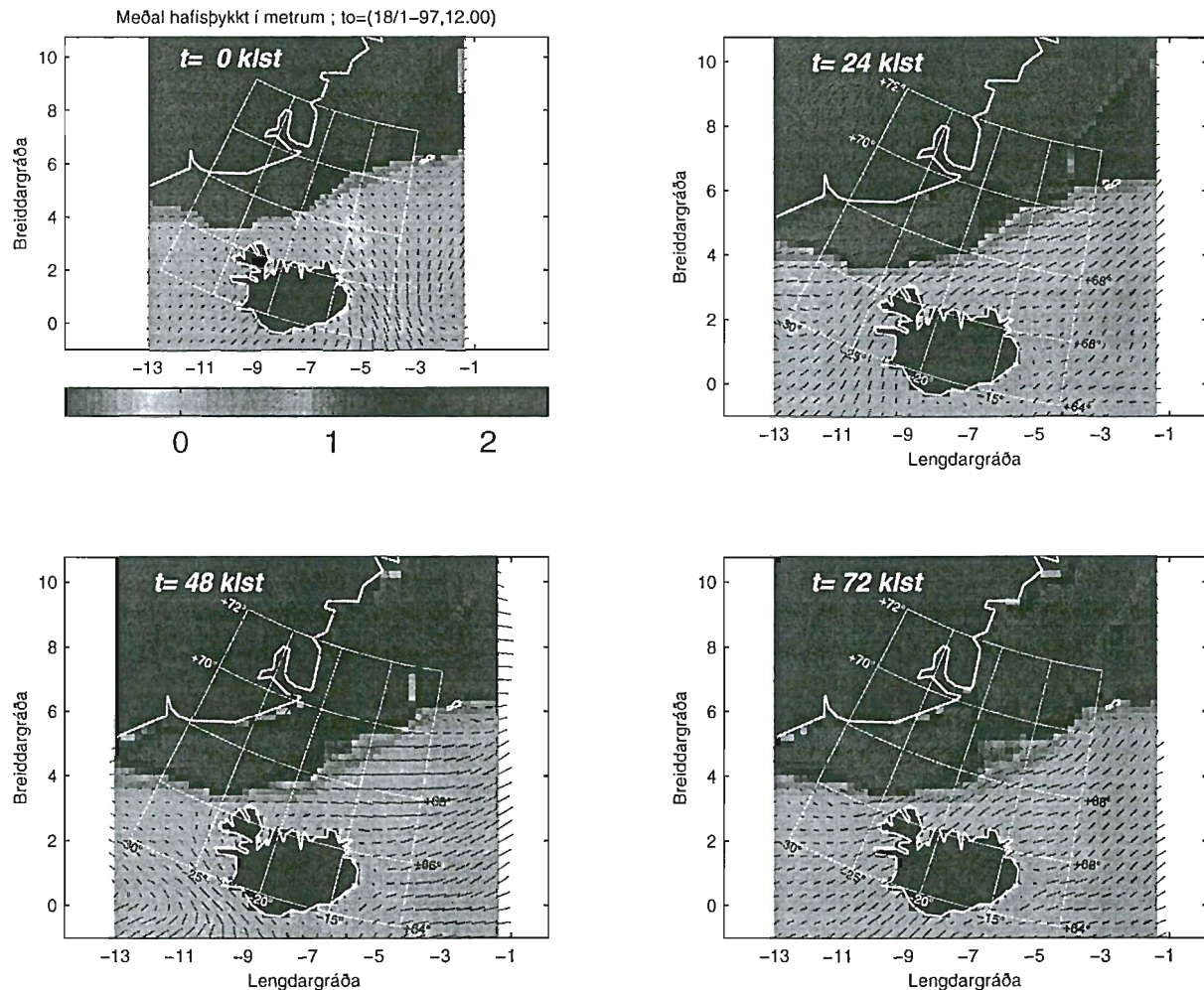


Mynd 7.11: Mismunur á þéttleikadreifingu hafís með og án þykktardreifingar við $t=0$ fyrir 13. janúar (72 klst) og 17. janúar (168 klst). Efri myndirnar eru teknar frá mynd 7.1.

8. KEYRSLA MEÐ UPPHAFSSKILYRÐUM 18. JANÚAR 1997

8.1 Venjuleg keyrsla

Mynd 8.1 sýnir niðurstöðu keyrslna fyrir upphafsskilyrðið 18. janúar. Eins og áður er keyrt sjö daga fram í tímann eða 168 klukkustundir og sýnir hver mynd niðurstöðu sem samsvarar klukkan 12 á hádegi. Öll gildi eru eins og það sem gildir fyrir kafla 6.1 og eru þau endurtekin í töflu 8.1 til þæginda.

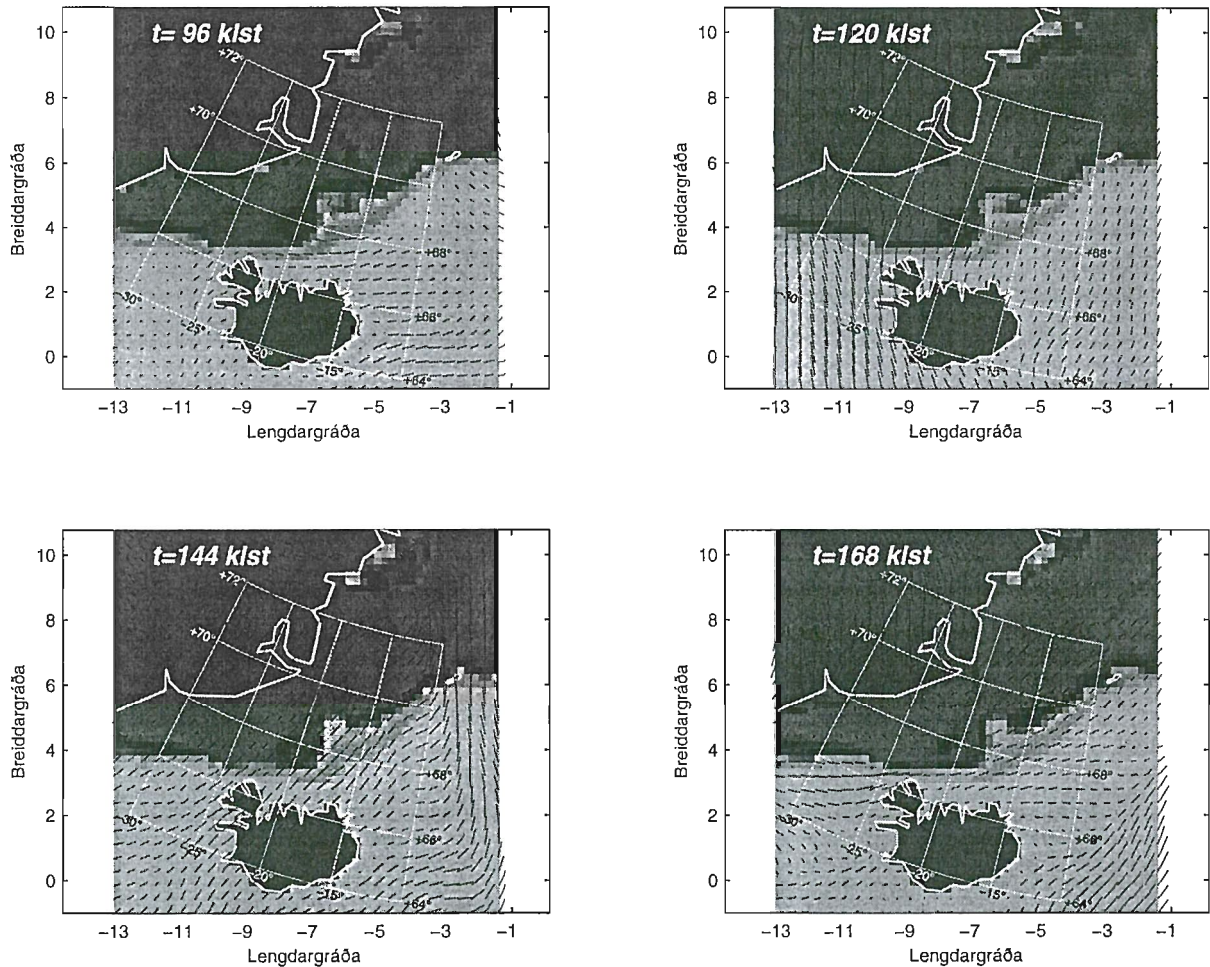


Mynd 8.1a : Fyrri hluti keyrslunnar fyrir upphafsskilyrðið 18. janúar. Sýndar eru niðurstöður fyrir 19. (24klst), 20. (48klst) og 21. janúar (72klst). Seinni hlutinn er í mynd 8.1b.

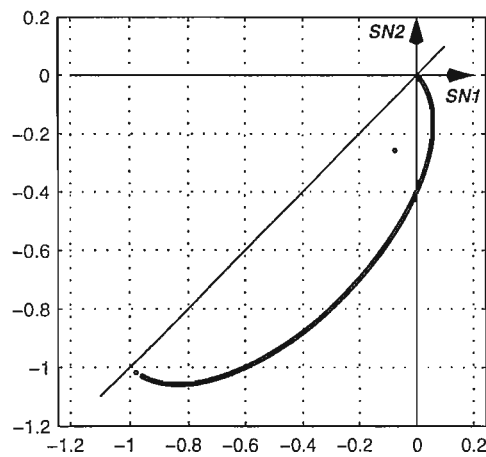
Fjöldi tímaskrefa:	168	Skerspennustuðull lofts: $C_{air} = 2 \cdot 10^{-3}$
Stærð tímaskrefs:	$\Delta t = 3600 s$	Skerspennustuðull hafs: $C_{wat} = 6 \cdot 10^{-3}$
Stærð griddsellu:	$\Delta x = 23376,6 km$	Sveigjuhorn lofts: $\theta_{air} = 0^\circ$
Eðlismassi hafiss:	$\rho_{ice} = 910 kg m^{-3}$	Sveigjuhorn hafs: $\theta_{wat} = 20^\circ$
Eðlismassi lofts:	$\rho_{air} = 1,3 kg m^{-3}$	Ísstyrkur: $P^* = 70000 N m^{-3}$
Eðlismassi hafs:	$\rho_{wat} = 1030 kg m^{-3}$	$DMIN$ (sjá kafla 4.3): $10^{-9} s^{-1}$
Gildi Coriolis:	$f^c = 1,36 \cdot 10^{-4} rad s^{-1}$	

Tafla 8.1: Gildi sem eru notuð í keyrslunni

Eins og með mynd 6.1 þá eru teiknaðar línur sem sýna stefnu og hlutfallslega heildarskerspennu τ_i frá haf- og loftstraumum samkvæmt jöfnum (6.1.1).



Mynd 8.1b : Niðurstöður fyrir 22. (96klst), 23. (120klst), 24. (144klst) og 25. janúar (168klst).



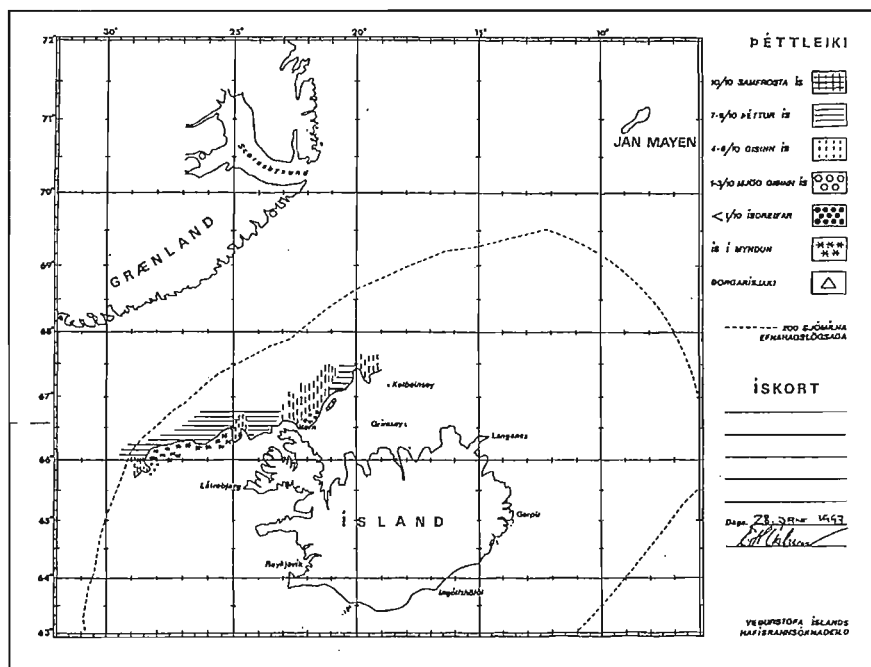
Mynd 8.2 : Normuð eigingildi samkvæmt jöfnu (6.1.2).

Myndir 7.1 og 8.1 eru mismunandi að því leyti að sú seinni lýsir meðalþykktinni sem fall af tíma, en sú fyrri lýsir heildarþéttleika sem fall af tíma. Þetta er gert þar sem ísinn er nú nógu

þykkur við Vestfirði til að þægilegt sé að meðhöndla þykktardreifingu í stað þéttleikadreifingar. Mynd 8.2 sýnir normuð eigingildi stresstensorsins fyrir ofangreinda keyrslu samkvæmt jöfnu (6.1.2). Eins og í kafla 6 eru eigingildi hundruðustu hveirrar griddsellu tekin fyrir öll tímaskref. Þar sést að hafísinn er yfirleitt í flotkenndu ástandi og er það í samræmi við kafla 6.7.

8.2 Samanburður við raunveruleikann

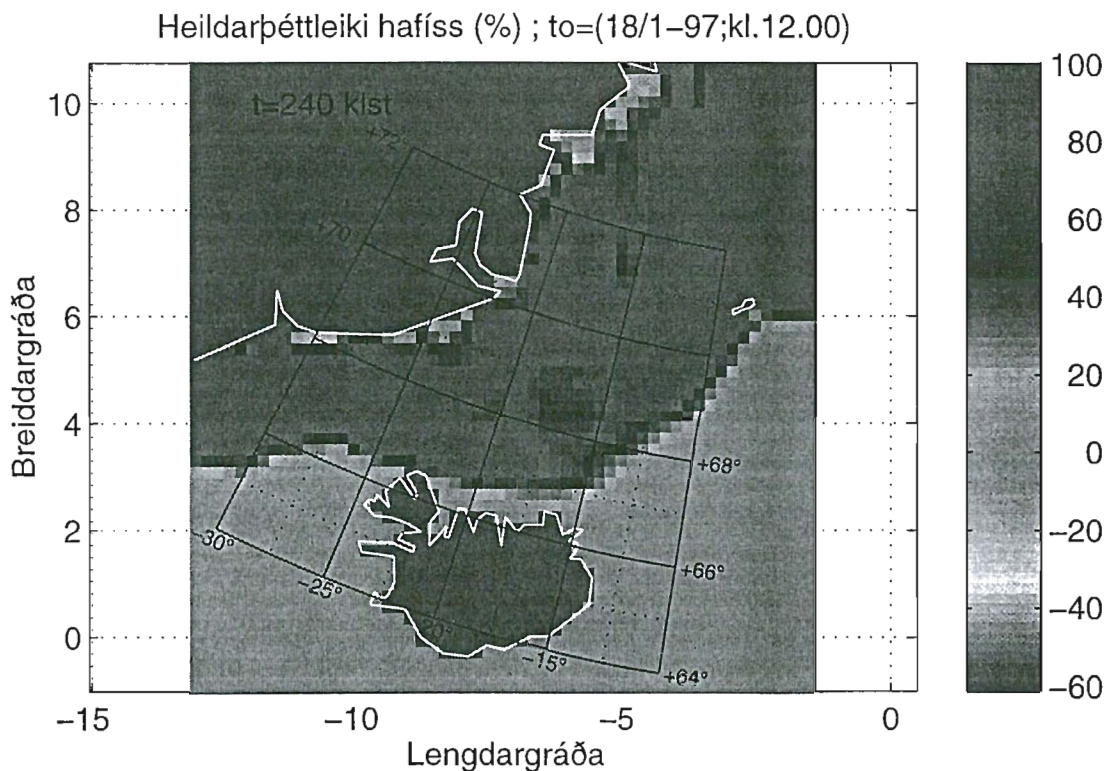
Mynd 8.3 sýnir ískort frá Landhelgisgæslu Íslands fyrir 28. janúar 1997. Mynd 8.4 sýnir niðurstöðu líkansins fyrir sama dag. Sýna bæði kortin heildarþéttleika hafíss, eins og gert er í kafla 6.2. Venjulega er hver keyrsla með tímaskrefið $\Delta t = 3600s$ þannig að síðasta tímaskrefið gildir fyrir 25. janúar. Þar sem ekki var til ískort frá Landhelgisgæslunni fyrir þennan sama tíma var stærð tímaskrefsins tvöfaldað (þetta er aðeins gert í þessum undirkafli). Þetta leiðir til þess að síðasta tímaskrefið gildir fyrir 1. febrúar 1997. Það er frekar óæskilegt að hafa svo langa keyrslu út af Neumannskilyrðinu fyrrgreinda í massavarðveislujöfnunni (sjá kafla 1.1.5): Ef einhver jaðargriddsella, norðan við og nálægt Jan Mayen, verður “smituð” af ís eru hafstraumarnir þannig að yfirleitt á sér stað innflæði af ís inn í kerfið, en muna ber að áhrif hafstrauma eru af sömu stærðargráðu og vindar, samanber kafla 6.4. Lesandi hefur eflaust tekið eftir því að í flestum myndum, sem sýna massabreytingu í keyrslu, er ísmassinn alltaf að aukast. Minnkar þessi aukning ef hafstraumur er sleppt, samanber myndir 6.12, 7.9 og 8.9. Þarf sterkan vind í “réttá átt” til að losa griddselluna við ísinn. Þess vegna má keyrslutíminn helst ekki fara mikið fram úr sjö dögum til að halda heildarmassa hafíss innan raunhæfra marka.



Mynd 8.3 : Athugun frá Landhelgisgæslu Íslands 28. janúar.

Önnur ástæðan fyrir því að höfundur lætur líkanið “aðeins” reikna sjö daga fram í tímann er vegna vindagagna (sjá kafla 1.2.3): Í bestu veðurlíkönunum, til dæmis því sem er í ECMWF, fæst góð niðurstaða í mesta lagi sjö daga fram í tímann. Seinna atriðið hefur í sjálfu sér enga merkingu í þessu verkefni því þar er eingöngu notast við mæld vindagögn (greiningargögn), samanber kafla 5.1.3.

Af mynd 8.3 og mynd 8.4 sést að vestan við Horn ber útreikningum og raunveruleika sæmilega vel saman. Austan megin er ísinn hins vegar kominn of nálægt norðurströnd Íslands. Við $t = 336 \text{ klst}$ (1. febrúar 1997) er keyrslan frekar frábrugðin raunveruleikanum yfirleitt. Óverulegur mismunur var á niðurstöðu líkansins 25. janúar fyrir $\Delta t = 1 \text{ klst}$ og $\Delta t = 2 \text{ klst}$.

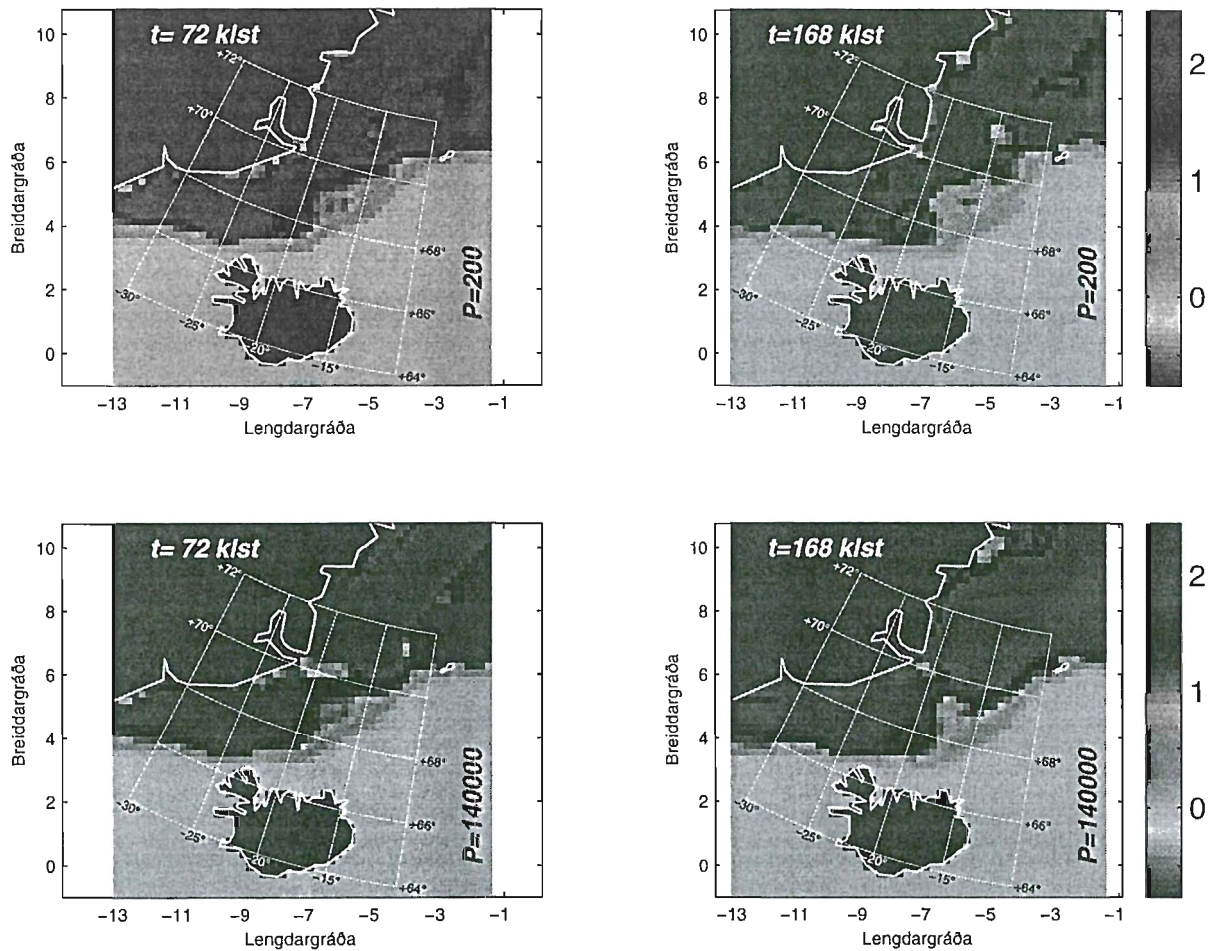


Mynd 8.4 : Niðurstaða útreikninga fyrir 28. janúar (eftir 120 tímaskref; $\Delta t = 2 \text{ klst}$).

8.3 Áhrif styrks íssins P^* á keyrslu.

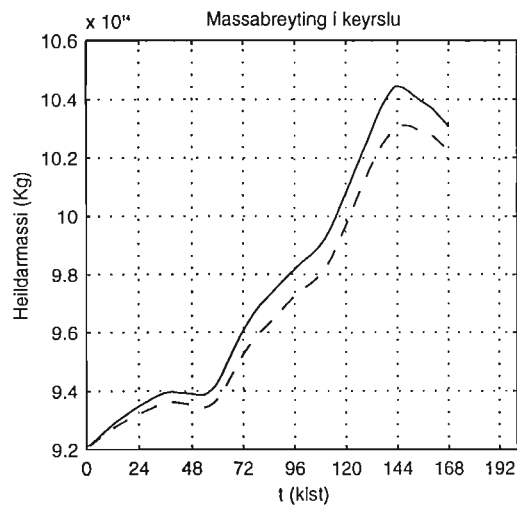
Eins og í kafla 6.3 er mikilvægi spennutensorsins athugað með því að breyta gildinu á P^* (sjá jöfnu(1.2.8) og (1.2.9)). Eins og áður er dregið úr styrk spennutensorsins með því að láta minnsta leyfilega gildið $P^* = 200 \text{ Nm}^{-3}$ í líkanið. Mynd 8.5 sýnir niðurstöðu keyrslna með slíkt gildi. Í þessari mynd er einnig notuð til samanburðar tvöföldun á venjulegu gildi eða $P^* = 140000 \text{ Nm}^{-3}$. Enda þótt lítill mismunur sé á þessum tveim keyrslum (mynd 8.5) með tilliti til ísjaðars er nokkur mismunur í þykktardreifingu. Þessi mismunur er ekki aðeins milli Grænlands og Jan Mayen heldur er einnig mismunur á Íslandshafi. Hvað er frábrugðið hér frá fyrri keyrslum (í kafla 6.3 og 7.3) á Íslandshafi? Í kafla 7 er ísinn á fyrrgreindu svæði um það bil jafn dreifður og hér, en hins vegar er hann mun þynnri (samanber mynd 7.2). Í kafla 6 er ísinn um það bil jafn þykkur og hér en ekki eins dreifður. Líklega fara áhrif spennutensorsins á

tilteknu svæði að hluta til eftir heildarismagni sama svæðis. Vaki spennutensorsins er eftir allt saman sjálfur hafsisinn.



Mynd 8.5 : Mismunur á þykktardreifingu þegar P^* er annars vegar 200 N/m^3 og 140000 N/m^3 hins vegar.

8.4 Áhrifum Corioliskrafts sleppt ($f^c = 0$)

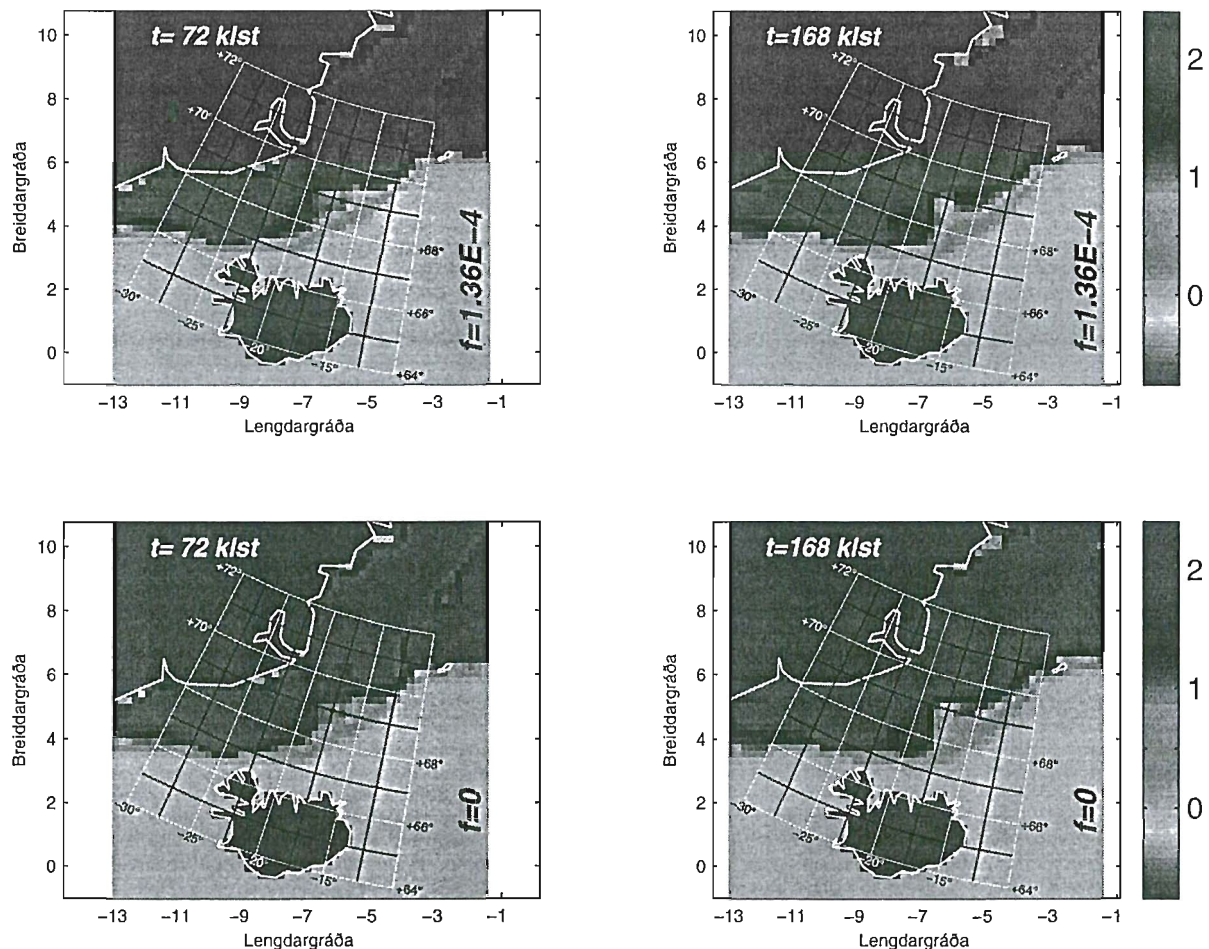


Mynd 8.6 : Mismunur á massabreytingu kerfisins þegar f^c er með eðlilegt gildi (heila línan) og þegar $f^c = 0$.

Mynd 8.6 sýnir mismun á massabreytingu með og án áhrifa Corioliskraftsins. Með samanburði við mynd 6.10 og 7.7 sést að meiri munur er hér á en því sem gerist í kafla 6 og kafla 7.

Ef lítið er á jöfnu (6.4.2), sést að áhrif Corioliskraftsins eru í réttu hlutfalli við ísmassann (meðal ísþykkt griddsellunnar). Af mynd 8.6 sést að meiri massi er í kerfinu en var í kafla 6 og kafla 7 sem skýrir (að öllum líkindum) þennan smávægilega mun.

Mynd 8.7 sýnir mismun milli keyrslna. Þó svo að meiri munur sé hér á en því sem skeður í fyrri köflum verður lesandi aðeins að rýna í myndirnar til að taka eftir því.



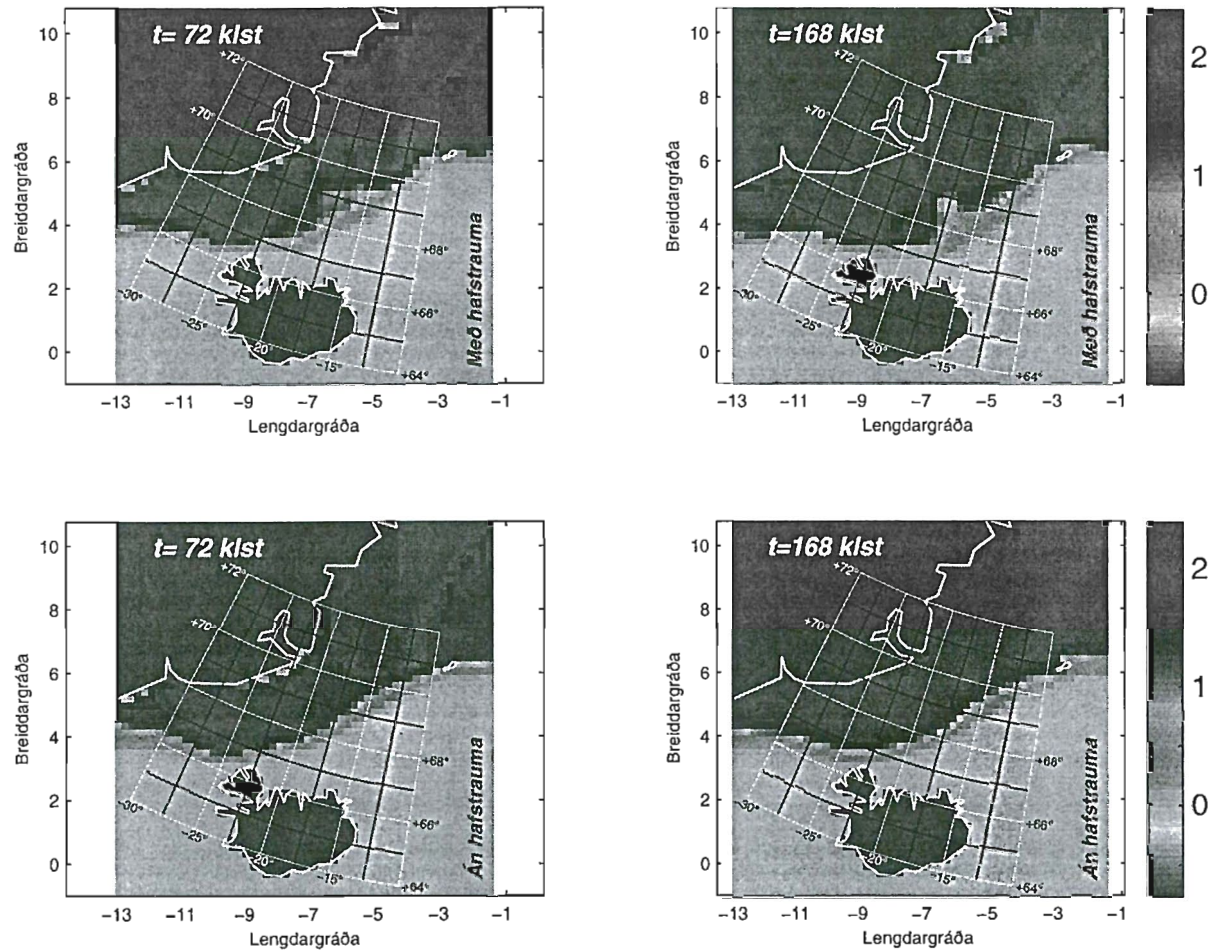
Mynd 8.7 : Mismunur á þykktardreifingu hafíss með og án áhrifa Coriolis-kraftsins fyrir 21. janúar (72 klst) og 25. janúar (168 klst) . Efri myndirnar eru teknar frá mynd 8.1.

8.5 Áhrifum hafstrauma sleppt

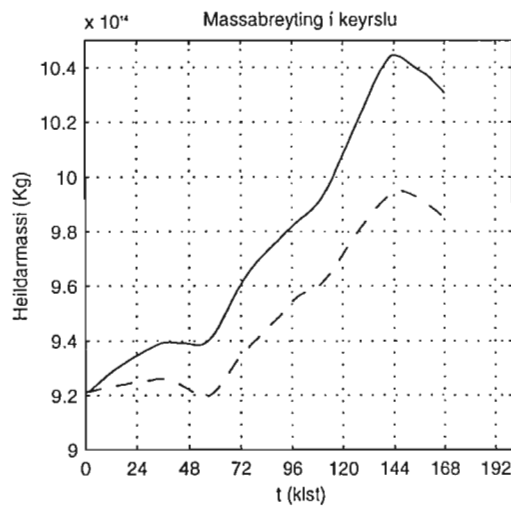
Í samræmi við stærðargráðugreininguna í kafla 6.4 eru áhrif hafstrauma mun meiri en áhrif Corioliskraftsins en um það hefur verið fjallað í köflum 6.7 og 7.5. Það sem er áhugavert er eftirfarandi: Við hnitin 17.5°V , 69°N og suður eftir er mun þynnri hafís en gerist án hafstrauma. Í fyrstu mætti ætla að þetta sé afbrigðilegt, því að af mynd 5.7 sést að hafstraumarnir á þessu svæði stefna aðallega í suðvestur. Þarna á sér einkum stað samspil hafstrauma og vinda. Ef skerspennusviðið í mynd 8.1 er skoðað sést að ekki eru miklir kraftar

að verki hér, en nógu miklir til að valda þessari opnun. Þó að þetta sé áhugavert eru engin merki um þessa opnun á ískorti frá Veðurstofu Noregs 27. janúar.

Hafísinn fer lítið inn á svæði Irmingerstraumsins fyrrgreinda (sjá kafla 6.5) þannig að tungumyndunin sem á sér stað í kafla 6, verður ekki hér.



Mynd 8.8 : Mismunur á þykktardreifingu hafíss með og án hafstrauma fyrir 21. janúar (72 klst) og 25. janúar (168 klst). Efri myndirnar eru teknar frá mynd 8.1.

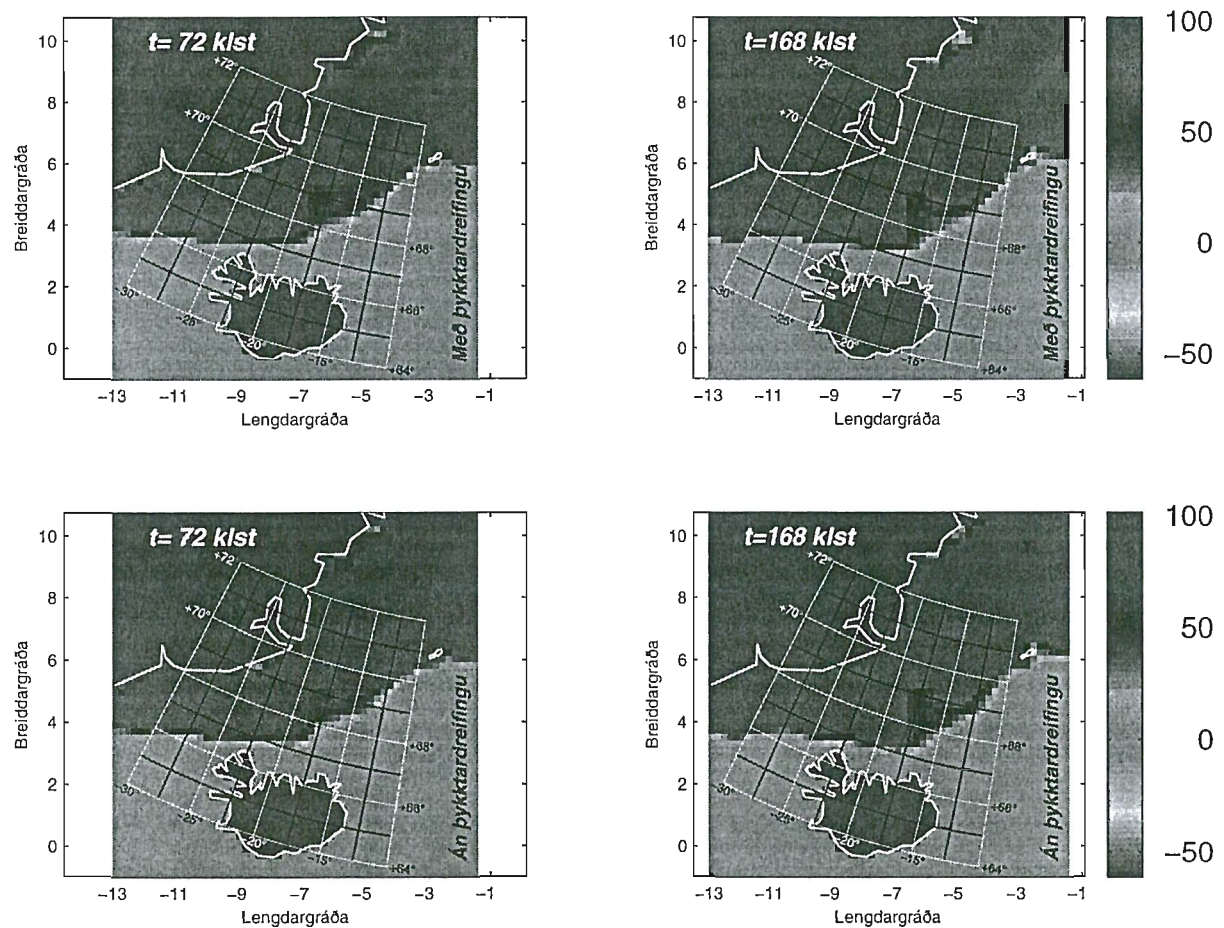


Mynd 8.9 : Mismunur á massabreytingu kerfisins með og án hafstrauma. Heila línan er með hafstraumum.

8.6 Engin þykktardreifing við $t=0$

Eins og í kafla 6.6 og kafla 7.6 er mjög lítil mismunur á þéttleikadreifingu hafiss með og án þykktardreifingar í upphafsskilyrði. Ísþykktin sem var valin í upphafsskilyrðinu er fyrsta árs meðal-þykktur ís: $h_{3-1/2} = 0,7 m \wedge h \in [0,45 m, 1,2 m[$ (sjá kafla 1.1.4). Ef valin er önnur þykkt eins og til dæmis grá-hvítur ís: $h_{2-1/2} = 0.225 m \wedge h \in [0.1 m, 0.45 m[$, er komin töluverður mismunur á, sérstaklega fyrir $t = 168 klst$. Ef valinn er margra ára ís: $h_{2-1/2} = 2.613 m \wedge h \in [0 m, 5 m[$, er mismunurinn minni en fyrir grá-hvítan ís en þó meiri en fyrir meðal-þykkan fyrsta árs ís.

Auðvitað er mikill mismunur á þykktardreifingu fyrir þessi tvö tilfelli og þarf ekki að ræða neitt frekar um það.



Mynd 8.10 : Mismunur á þéttleikadreifingu hafiss með og án þykktardreifingar við $t=0$ fyrir 21. janúar (72 klst) og 25. janúar (168 klst).

9. NIÐURSTAÐA OG LOKAORÐ

Lesandi hefur eflaust tekið eftir samhverfu í uppbyggingu kafla 6, 7 og 8. Hver undirkafli í þessum köflum inniheldur sama umræðuefnið. Undanskilinn er kafli 6.7 þar sem engin hliðstæð umfjöllun er í köflum 7 og 8. Tafla 9.1 sýnir stutta samantekt úr þessum þrem köflum: Það sem er áhugavert í töflunni er hversu lítið vægi spennutensorinn hefur í suðurhluta kerfisins (fyrir norðan Ísland). Ef lítið er á stærðargráðugreininguna í kafla 6.4 sést að vægi spennutensorsins er sambærilegt við hafstrauma og vinda. En þessi greining gildir aðeins fyrir kerfið í heild sinni. Aðeins tölulegar tilraunir gefa vægi hans á afmörkuðu svæði kerfisins. Það væri áhugavert að prófa mjög einfalt líkan sem aðeins samanstæði af jafnvægi milli skerspennu hafstrauma og skerspennu vinda eins og jafna (2.2.11) sýnir. Slíkt líkan þyrfti mjög einfaldar upplýsingar til útreikninga (hvar ísjaðar er, hafstrauma og vinda) og væri það helsti kostur þess.

	<i>KAFLI 6.X</i>	<i>KAFLI 7.X</i>	<i>KAFLI 8.X</i>
<i>Undirkafli X.2:</i> Er niðurstaða útreikninga sambærileg raunverulegri niðurstöðu eftir 72 tímaskref ?	Já	Nokkurnveginn, en ekki í lagi norður fyrir Horn.	Ekki til marktækar upplýsingar.
<i>Undirkafli X.2:</i> Er niðurstaða útreikninga sambærileg raunverulegri niðurstöðu eftir 168 tímaskref ?	Ekki á Norður-Íslandshafi en sæmilega annarsstaðar.	Ekki til marktækar upplýsingar.	Sæmilegt vestan við Horn eftir 240 klst (Eftir 120 tímaskref).
<i>Undirkafli X.3:</i> Hefur spennutensorinn vægi í keyrslu ?	Í norðurhluta kerfisins en ekki í suðurhluta þess.	Í norðurhluta kerfisins en ekki í suðurhluta þess.	Í norðurhluta kerfisins. Smávægileg áhrif eru til staðar í suðurhluta þess.
<i>Undirkafli X.4:</i> Hefur Corioliskrafturinn vægi í keyrslu ?	Nei	Nei	Smávægilegt
<i>Undirkafli X.5:</i> Batnar niðurstaða útreikninga norðan við Ísland ef hafstraumum er sleppt ?	Já	Já	Nei
<i>Undirkafli X.6:</i> Er mismunur milli keyrslna með og án þykktardreifingar í upphafsskilyrði massavarðveislujöfnunnar ?	Nei	Nei	Nei, en ef önnur þykkt er notuð kemur fram mismunur.

Tafla 9.1: Samantekt á niðurstöðum úr kafla 6, 7 og 8.

Líkanið MCRIM 2.5 tekur aðeins inn eitt breiddargráðugildi fyrir allt kerfið. Það þýðir að sama Coriolis-gildi ($f^c = 1.34 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$) gildir fyrir allt kerfið. Þetta er ekki í samræmi við raunveruleikann, því að þetta gildi er í raun fall af breiddargráðu og ætti því ekki að vera fasti.

Með niðurstöðum úr kafla 6.4, 7.4 og 8.4 sést að þessi nálgun er ekki svo slæm því að áhrif Corioliskraftsins á keyrsluna eru svo lítil hvort sem er. Þetta er nokkurn veginn í samræmi við stærðagráðugreininguna í kafla 6.4. Þó finnst höfundu að áhrif þessara þátta hefðu átt að vera meiri því að aðeins munar einni stærðargráðu milli áhrifa Corioliskraftsins annars vegar og til dæmis hafstrauma hins vegar.

Oft eru aðeins upplýsingar um það hvar ísjaðarinn er, en ekki upplýsingar um þykktardreifingu innan þessa jaðars. Þá getur líkannotandi aðeins gert tvennt: Annars vegar giskað á þykktardreifinguna (þetta er nokkuð sem vanur maður gæti gert) eða ein ísþykkt látin gilda fyrir allt kerfið. Seinna tilvikið er gert í köflum 6.6 og 7.6. Er áhugavert að sjá þar hve keyrslurnar koma vel út. En það er greinilega mikilvægt að velja “réttu” þykktina, því að eins og sýnt er í kafla 8.6 stenst ísflokkurinn “margra ára ís” eða “grá-hvítur ís” illa samanburði. Notast var við “fyrsta árs meðal-þykkun ís” í fyrrgreindum köflum og kom hann best út í þessum samanburði.

Eins og áður hefur verið nefnt (kafla 1.1.3) er ísþykktarvaxtarhraðinn f í massa-varðveislujöfnu líkansins hafður í réttu hlutfalli við hitastigsmismun milli yfirborðshita hafs og lofts. Líkanið lætur gilda sama ísþykktarvaxtarhraða f fyrir öll tímaskref og fyrir allar griddsellur. Þessi nálgun á rétt á sér fyrir kanadísk hafsvæði. Ekkert aðstreymi af heitum sjó á sér stað þar þannig að hitastigsdreifing á yfirborði sjávar er lítil með tilliti til tíma og rúms. Einnig eru vindar þar stöðugir þannig að yfirborðshiti lofts breytist lítið á sjö dögum.

Þessar aðstæður gilda alls ekki á íslensku hafsvæði. Þar á sér stað aðstreymi af köldum og ferskum sjó frá Norður-Íshafi annars vegar og aðstreymi af heitum og söltum sjó frá Golfstraumi hins vegar. Hafstraumarnir eru tímaháðir þannig að aðstreymishlutarnir eru tímaháðir. Yfirborðshiti lofts er mjög breytilegur vegna síbreytilegs veðurfars. Þetta leiðir til þess að ofangreind nálgun á vaxtarhraða í líkaninu er léleg fyrir íslensk hafsvæði. Áhrifa þessa liðs gæti farið að gæta eftir þriggja daga keyrslu þannig að það væri æskilegt að breyta frumkóða líkansins á þann veg að líkanið tæki inn tíma- og rúmháð gildi á yfirborðshitastigi hafs- og lofthjúps til reikninga á vaxtarhraða.

Greinilegt er að líta þarf betur á þátt hafstraumanna. Í þessu verkefni hefur eingöngu verið notast við meðaltalsstrauma (sjá kafla 5.1.5). Þetta er óæskileg nálgun því að samkvæmt köflum 6.5 og 7.5 batnar keyrslan norðan við Ísland ef hafstraumi er sleppt, og þarf því að athuga þá betur. Ef lítið er á kafla 6.2, 7.2 og 8.2 sést með samanburði við raunveruleikann að líkanið gefur of oft (að mati höfundar) ekki nógu góðar niðurstöður. Miðað við stærðargráðugreininguna í kafla 6.4 eru hafstraumarnir um það bil jafn mikilvægir og vindar, þannig að líkleg ástæða fyrir fyrrgreindri skekkju er einmitt ónákvæmni hafstraumanna. Næsta æskilega skrefið tengt líkaninu MCRIM 2.5 væri því að tengja það við haflíkan sem gæfi tímaháða hafstrauma. Umfang þessa meistaráprófsverkefnis er þannig, að ekki hefur gefist tími til þessa

hér. Meðal ofangreindra niðurstaðna eru tvær mikilvægastar að mati höfundar og slær hann botninn í þetta rit með þeim.

- *Spennutensorinn virðist ekki vera mikilvægur á íslenskum hafsvæðum. Það leiðir til þess að hægt er að notast við einfaldara hafslíkan en það sem er notað hér. Skynsamlegt væri að prófa jöfnu (2.2.11) eina og sér og bæta inn í hana reynslustærðum (empirical values) til að fá sem bestar niðurstöður. Slíkt reynslulíkan (empirical model) hefði þann kost (yfir stærri líkön eins og MCRIM2.5) að mjög einfaldar upplýsingar á takmörkuðu svæði væru nægjanlegar til að keyra það. Gallinn við slíkt líkan væri sá að takmarka yrði lengd keyrslutíma, því að áhrif áhrifaminni þátta hreyfijöfnunnar eins og til dæmis spennutensorsins (fyrir suðurhluta kerfisins) vaxa með tíma.*
- *Óháð því hvort unnið verður áfram með líkanið MCRIM2.5 eða einfaldara líkan (eins og nefnt er hér að ofan) er mikilvægt að notast sé við góða tímaháða hafstrauma frá vel þekktu haflíkani. Ef slíkt er ekki fyrir hendi, verður notandi að mynda meðaltalsstrauma með tilliti til hvers mánaðar fyrir sig en ekki með tilliti til alls ársins eins og gert er í þessu verkefni. Það er mjög mikilvægt (og í raun verkefni út af fyrir sig) að fá hafstraumana í gott lag áður en haldið er áfram með verkefni af þessu tagi.*

HEIMILDASKRÁ

Brown R.A. 1990. Fluid mechanics of the atmosphere. Academic Press. Kaflar 1.8 og 1.9.

Dietrich G., Kalle K., Krauss W. & Seidler G. 1975. Eine Einführung in die Ozeanographie. Gebrüder Borntrager. Bls. 518.

Dæhlen M. & Tveito A. (ritstjórar) 1997. Mathematical Models and Software Tools in Industrial Mathematics. Birkhäuser. Annar undirkaflinn í kaflanum: Basic Equations in Eulerian Continuum Mechanics eftir E. Haug og H. P. Langtangen.

Fletcher C. A. J. 1990. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I (second edition). Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag. Bls. 18, bls. 43, bls. 228, bls. 277, bls. 280, bls. 299, bls. 316 og bls. 336-338.

Gerhart P. M., Cross R. J. & Hochstein J. I. 1992. Fundamentals of Fluid Mechanics (second edition). Addison Wesley Publishing Company. Kaflar 1.2, 1.3, 3.3.4, 3.3.5, 4.3.1 og 5.2.1.

Häkkinen S. 1990. Models and their Applications to Polar Oceanography. Polar Oceanography, Part A: Physical Science; Academic Press. Kafli 7.I.b.

Hibler III W. D. & Flato M. F. 1992. Sea Ice Models. Climate System Modeling. Cambridge University Press. Kafli 12.3.

Hibler III W. D. 1977. A Viscous Sea Ice Law as a Stochastic Average of Plasticity. Journal of Geophysical Research (Vol. 82, No. 27). Bls. 3933-3934.

Hibler III W. D. 1979. A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model. Journal of Physical Oceanography (Vol. 9, No. 4). Bls. 817-819 og bls. 822.

Holton J. R. 1992. An Introduction to Dynamic Meteorology (third edition). Academic Press. Kaflar 1.1, 1.5, 2.2, 2.3, 2.5.2, 3.5 og 5.3.4.

Hunter S. C. 1983. Mechanics of Continuous Media (second edition). John Wiley & Sons. Kafli 2.2.

- Malcolm M. 1986. Mechanical Behavior of Sea Ice. The Geophysics of Sea Ice (Series B: Physics Vol. 146). NATO ASI Series. Bls. 195-197 og bls. 258-259.
- Malvern L. E. 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc. Bls. 1-2 og bls. 337-340.
- Mase G. E. 1970. Schaum's Outline Series: Theory and Problems of CONTINUUM MECHANICS. McGraw-Hill Inc. Kaflar 1.13, 2.11, 2.6, 3.4, 3.6, 4.1, 4.4, 4.6, 5.4, 5.6, 7.2, 8.1-4 og 8.6.
- Neralla V. R. 1994. Operational Ice Model at the Atmospheric Environment Service, Canada. The International Society of Offshore and Polar Engineers (ISBN: 1-880653-12-5, Vol II). Bls. 475 og bls. 473.
- Neralla V. R., Jessup R. G. og Venkatesh S. 1988. The Atmospheric Environment Service Regional Ice Model (RIM) for Operational Applications. Marine Geodesy Vol. 12. Bls. 146.
- Oceanographic Atlas of the Polar Seas (Part II, Arctic). U. S. NAVY Hydrographic Office, Washington, D. C.
- Pond S. & Pickard G. L. 1983. Introductory Dynamical Oceanography (second edition). Butterworth-Heinemann Ltd. Bls. 79-81.
- Pritchard R. S. (editor) 1980. Sea Ice Processes and Models (Proceedings of the ADJEX-ICI(IAHS) Symposium at Seattle, September 1977). IAHS-AISH Publication No. 124.
- Reimer R., Pritchard R. & Coon H. D. 1980. Consistent Reduction of Ice Thickness Distribution to a few Categories. Flow Research Co. Rep. #167.
- Shuchman R. A. & Onstott R. G. 1990. Remote Sensing of the Polar Oceans. Polar Oceanography, Part A Physical Science; Academic Press. Bls 130.
- Thorndike A. S., Rothrock D. A., Maykut G. A. & Colony R. 1975. The Thickness Distribution of Sea Ice. Journal of Geophysical Research (Vol. 80, No. 33). Bls. 4501-4505.

- Tremblay L. B. 1997. Modelling Sea Ice as a Granular Material, with Applications to Climate Variability. C²GCR Report 97-2, McGill University, Canada. Bls. 31-32.
- Unnsteinn Stefánsson 1962. North Icelandic Waters . Atvinnudeild Háskólans - Fiskideild, III. Bindi. Bls. 57 og 163.
- Unnsteinn Stefánsson 1994. Haffræði II. Háskólaútgáfan. Bls. 168.
- Vinje T., Nordlund N. & Kvambekk Å. 1997. Monitoring ice thickness in Fram Strait. Journal of Geophysical Research. Er í prentun.
- Zang J. & Hibler III W. D. 1997. On an Efficient Numerical Method for Modeling Sea Ice Dynamics. Journal of Geophysical Research (Vol. 102, No. C4). Bls. 8699.

Eftirtöldum aðilum vil ég þakka fyrir þann stuðning sem þeir hafa veitt mér í meistaraverkefni mínu.

Leiðbeinendur:

Ég vil fyrst og fremst þakka aðalleiðbeinenda mínum **Þór Jakobssyni** fyrir að standa að undirbúningi og skipulagi þessa náms og sér í lagi fyrir að hvetja mig í þetta nám. Einnig fyrir góðan stuðning og leiðbeiningar: Hefði hann ekki haldið í taumana á mér þá væri ég týndur í fræðilegum smáatriðum sem hefðu haft litla þýðingu fyrir verkefnið í heild sinni. Ekki ber síst að nefna þá frábæru námsaðstöðu sem hann bauð mér upp á og launuð verkefni sem kom sér vel fjárhagslega.

Einnig vil ég þakka meðleiðbeinendum mínum **Sven Þ. Sigurðssyni og Þorbirni Karlssyni** fyrir þolinmæði og vel þegnar ábendingar varðandi námið. Sven þakka ég mikilsverðar leiðbeiningar við stærðfræðilega útfærslu á líkaninu og uppbyggingu ritgerðarinnar. Leiðbeinendurnir voru einnig duglegir að halda aftur af mér og minntu mig á að ég væri aðeins í meistaránámi og stuðluðu þannig að því að verkefninu yrði lokið á réttum tíma. Fyrir það færi ég þeim mínar bestu þakkir. Öllum leiðbeinendum mínum þakka ég gaumgæfilegan yfirlestur ritgerðar minnar, gagnlegar ábendingar og góð ráð varðandi samningu og málfar.

Venkata R. Neralla:

Fyrir að hefja samstarf við okkur Þór Jakobsson og láta okkur í té þetta mikla hafís líkan sem hefur verið skrifað og þróað í fleiri ár hjá Kanadísku umhverfisstofnuninni (AES). En þar er Neralla nú við störf. Einnig vil ég þakka honum fyrir gagnleg svör við fyrirspurnum mínum.

Jón Egill Kristjánsson:

Jón Egill er Første Amanuensis við Háskólann í Ósló. Bauð hann mér þangað sem heimsóknarstúdent í tengslum við námið. Ég var þar í eitt mjög svo ánægjulegt ár. Vil ég þakka honum hér með fyrir þetta vingjarnlega boð.

Björn Erlingsson:

Fyrir fræðilega umræðu um flotfræði hafíss og þá sérstaklega fyrir að útskýra flæðiregluna og myndun spennutensorsins út frá þeirri reglu. Sú umræða var mér mikilvæg og kann ég honum bestu þakkir.

Ólafur Wallevik

Hann kom með vinsamlegar athugasemdir í uppsetningu ritsins. Sérstaklega vill ég þakka honum fyrir framlag hans í enskuþýðingu kafla 3.

Eiríkur Sigurðsson:

Fyrir allar þær óskráðu upplýsingar um hafísinn sem hann lét mér í té. Í ýmsum köflum þessa rits vitna ég beint í hann. Sannarlega er kominn tími á að þessi vísindamaður skrifi rit um alla þá þekkingu sem hann hefur öðlast.

Ingibjörg Jónsdóttir:

Greinar tengdar hafslfökönnum, sem hún benti mér á, var ómældur stuðningur við gerð þessa rits. Einnig vil ég þakka henni fyrir góðar kennslustundir um gervihnattamyndir.

Torgny Vinje:

Fyrir ánægjulegt viðtal í upphafi um hafísinn við Austur-Grænland. Hann er við störf hjá Norsk Polarinstitut. Einnig vil ég þakka honum fyrir skjót viðbrögð við fyrirspurnum sem ég hafði seinna meir.

Halldór Björnsson:

Fyrir að senda mér frá Kanada upplýsingar og rit um hafísinn. Hann hefur nýlokið doktorsnámi við McGill háskóla við líkangerðir tengdar hreyfingu hafíss. Vil ég nota tækifærið hér með og óska honum til hamingju með þann áfanga.

Hilmar Björgvinsson:

Hilmar er brautskráður úr meistaranámi frá líffræðideild Háskóla Íslands. Hann gaf mér góðar ábendingar viðvirkjandi uppbyggingu ritsins og kann ég honum bestu þakkir fyrir það.

Jess U. Jørgensen:

Jess vinnur á Veðurstofu Danmerkur og tekur þátt í HIRLAM verkefninu þar. Fékk ég hjá honum vindagögn sem eru notuð í meistaraþrófsverkefninu. Ég þakka honum og jafnframt Veðurstofu Danmerkur fyrir það og alla þolinmæði gagnvart fjölda spurningua sem ég sendi í tölvupósti.

Satellite Receiving Station, Dundee University, Scotland:

Myndir 0.2 og 5.8 eru fengnar þaðan og eru birtar með þeirra leyfi. Fyrir það þakka ég þeim.

Veðurstofa Íslands:

Að lokum þakka ég yfirstjórn Veðurstofu Íslands velvild og prýðilega vinnuástöðu á stofnuninni.

VIÐAUKI A :ÁGRIP AF HUGMYNDAFRÆÐI SAMFELLDRA EFNA.....	100
SAMFELLD EFNISÖGN (CONTINUUM PARTICLE)	100
FRAMSETNING EULERS OG LAGRANGE.....	103
VIÐAUKI B :VARÐVEISLA MASSANS.....	106
VARÐVEISLA MASSANS Í FRAMSETNINGU LAGRANGE.....	106
VARÐVEISLA MASSANS Í FRAMSETNINGU EULERS	107
VÖRPUN FRÁ FRAMSETNINGU EULERS YFIR Í FRAMSETNINGU LAGRANGES	108
VIÐAUKI C :VARÐVEISLA SKRÍÐÞUNGANS.....	109
VIÐAUKI D :VARÐVEISLA ORKUNNAR	113
VIÐAUKI E :MOHR-HRINGURINN	115
VIÐAUKI F :GALLI Á HUGMYNDAFRÆÐI HIBLERS.....	117
VIÐAUKI G :FORRITIN LESABOF OG LESAPRT	120
LESABOF.F90	120
LESAPRT.F90.....	124
VIÐAUKI H :MATLAB FORRIT TIL FRAMSETNINGAR Á NIÐURSTÖÐUM.....	125
GINCONT.M.....	125

VIÐAUKI A : Ágrip af hugmyndafræði samfelldra efna

Samfelld efnisögn (continuum particle¹)

Við meðhöndlun á samfelldu efni (continuum matter) þarf að endurskilgreina hugtakið ögn. Ástæðan er að töluvert erfiðara er að leysa samfelld vandamál (straumfræðileg og burðarþolsleg) með því að líta á einstök atóm og/eða sameindir sem hina eiginlegu ögn kerfisins² (til dæmis með því að beita hreyfilögmálum Newtons á hvert einasta atóm og/eða sameind kerfisins) því fjöldi þeirra er einfaldlega of mikill. Í mörgum tilfellum er hægt að líta framhjá þessari framsetningu og gera ráð fyrir að kerfið sé myndað af eiginlegu samfelldu efni [Holton ,1992], [Malvern ,1969]. Hér verður að athuga að kerfið, sem unnið er í, er miklu stærri en stærð tilsvarendi atóms og/eða sameinda þess [Holton ,1992].

Hvernig er ögn skilgreind í slíku kerfi og hvaða skilyrðum þarf hún að uppfylla?³ Nauðsynlegt er að þessi nýja ögn samanstandi alltaf af sama efninu, það er af sömu atómum og/eða sameindum yfir það tímabil sem lausn á verkefninu stendur yfir, ef hægt á að vera að beita hreyfilögmáli (2. lögmál Newtons), varðveislumassans og varðveislu orkunnar (1. lögmál varmafræðinnar), á hana, með góðri samvisku, fyrir fyrrgreint tímabil.

Eitt mikilvægasta skilyrðið sem ögnin verður að uppfylla er að allar breytistærðir hennar séu samfelld n -sinnu diffranlegt fall í rúmi og tíma, þar sem $n \geq 1$. Þegar þetta skilyrði er uppfyllt, er hægt að beita stærðfræðigreiningu (calculus) á tilsvarendi vandamál, í stað strjállar stærðfræði (discrete mathematics) [Gerhart et. al. ,1992]. Með öðrum orðum þá er hægt að setja fram tilsvarendi lögmál á form hlutafleiðujafna: Gerum ráð fyrir að ákveðin ögn hafi hnitin $(x_i) = (x_1, x_2, x_3)$ á tíma t með breytistærðina $\varphi_{ij}(x_i, t)$ ⁴. Gerum ráð fyrir að hegðun þessarar breytistærðar sé lýst með jöfnunni:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}(x_p, t)}{\partial t} + v_p \frac{\partial \varphi_{ij}(x_p, t)}{\partial x_p} = v \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(x_p, t)}{\partial x_p \partial x_p}$$

Út frá þessari jöfnu er nauðsynlegt að hafa $\varphi_{ij}(x_i, t)$ samfelld tvídiffranlegt fall með tillit til rúmhnita og samfelld einu sinni diffranlegt með tillit til tíma, því að frumforsenda fyrir notkun þessarar hlutafleiðujöfnu er að afleiðurnar í henni séu skilgreindar. Þessi krafa jafngildir:

$$\lim_{x_p \rightarrow \bar{x}_p^-} \varphi(x_p, t) = \lim_{x_p \rightarrow \bar{x}_p^+} \varphi_{ij}(x_p, t) \quad (\text{A.1.1})$$

¹ Einnig nefnt material point innan verkfræðinnar og parcel innan veðurfræðinnar.

² Kerfi: Það svæði sem við erum að vinna í, það er vaki eða miðill samfelldra efna (the continuum medium). Dæmi: A) Straumur í kringum flugvélavæng ; B) Hafisflæði á Íslandshafi ; C) Snjóflóð niður fjallshlíð.

³ Héðan í frá er átt við samfellda efnisögn, þegar talað er um ögn.

⁴ Stærðin $\varphi_{ij}(x_i, t)$ er almennt annars stigs tensor, en getur einnig verið vigur og er þá táknaður sem $\varphi_i(x_i, t)$ eða skalar stærð, táknað með $\varphi(x_i, t)$. Vigurinn getur til dæmis verið hraði, það er $v_i = \varphi_i(x_j, t)$, með v sem eðlissegju (kinematic viscosity). Skalastærðin getur til dæmis táknað hita $T = \varphi(x_i, t)$, með v sem varmasveimsstuðullinn (thermal diffusivity).

$$\lim_{x_p \rightarrow \tilde{x}_p^-} \dot{\varphi}_{ij}(x_p, t) = \lim_{x_p \rightarrow \tilde{x}_p^+} \dot{\varphi}_{ij}(x_p, t) \quad (\text{A.1.2})$$

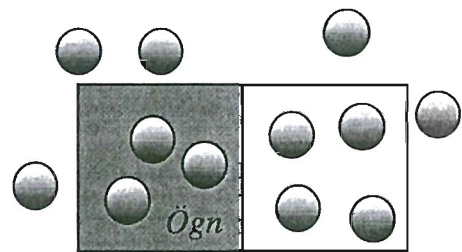
$$\lim_{x_p \rightarrow \tilde{x}_p^-} \ddot{\varphi}_{ij}(x_p, t) = \lim_{x_p \rightarrow \tilde{x}_p^+} \ddot{\varphi}_{ij}(x_p, t) \quad (\text{A.1.3})$$

Þar sem \tilde{x}_p er hnitíð mitt á milli tveggja agna. Hér er $\dot{\varphi}_{ij}(x_p, t)$ diffrun af $\varphi_{ij}(x_i, t)$ með tillit til annaðhvort rúms eða tíma. Til dæmis fyrir hið fyrra tilfelli er $\dot{\varphi}_{ij}(x_p, t)$, samkvæmt almennri stærðfræðigreiningu

$$\left. \frac{\partial \varphi_{ij}(x_p, t)}{\partial x_p} \right|_{x_p = \tilde{x}_p} = \lim_{\Delta x_p \rightarrow 0} \frac{\varphi_{ij}(\tilde{x}_p + \Delta x_p / 2, t) - \varphi_{ij}(\tilde{x}_p - \Delta x_p / 2, t)}{\Delta x_p} \quad (\text{A.1.4})$$

Eins og áður sagði, þarf ekki að hugsa út í aðra afleiðu með tilliti til tíma í þessu dæmi, þannig að önnur afleiða í jöfnu (A.1.3) er aðeins með tilliti til rúmhnita. Með jöfnum (A.1.1) til (A.1.3) er komið að kjarna vandamálsins. Með þessum jöfnum er átt við að breyting á $\varphi_{ij}(x_p, t)$, $\dot{\varphi}_{ij}(x_p, t)$ og $\ddot{\varphi}_{ij}(x_p, t)$ milli tveggja agna, sem eru hlið við hlið, stefni á núll. Þetta er krafan um samfelldni: Að stærðin $\varphi_{ij}(x_p, t)$ breytist ekki í stökkum heldur hafi samfellda dreifingu í tíma og rúmi, þannig að afleiðurnar í fyrrgreindri jöfnu verði skilgreindar og hægt verður að nota hana [Brown, 1990], [Malvern, 1969].

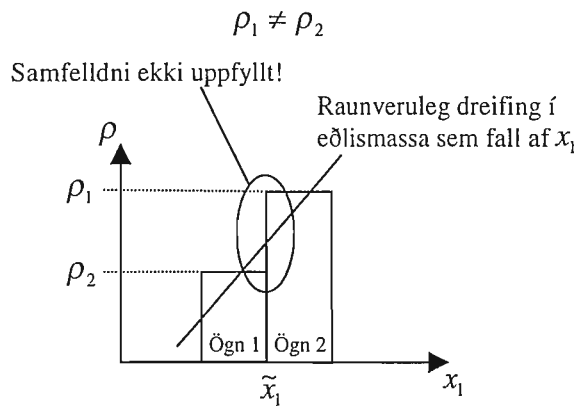
Breytistærðin er meðhöndluð sem fasti *inni í* ögninni, því að hugmyndafræði samfelldra efna byggir á því að finna breytingar á *milli* agna (sem stefna á, en eru ekki núll, samanber umræðuna að ofan), en ekki *inni í* þeim. Spurningin er: Hver á stærð (rúmmál) agnarinnar að vera, ef ofangreind krafa á að vera uppfyllt? Gerum nú ráð fyrir að $\varphi(x_p, t) = \rho(x_p, t) = \delta m / \delta V$ sé eðlismassi agnarinnar, δm massi hennar og δV rúmmál (stærð agnarinnar). Ef ögnin er það lítil að hún innihaldi til dæmis aðeins 3 atóm, þá gæti næsta ögn við hliðina innihaldið til dæmis 4 atóm (sjá mynd A.1). Ef þetta tiltekna rúmmál er valið sem hin almenna stærð agnar í kerfinu, þá er hið mikilvæga skilyrði um samfelldni ekki uppfyllt, því eðlismassinn eykst nú snögglega frá $3m_{atom} / \delta V$ í $4m_{atom} / \delta V$ sem leiðir til þess að diffrun á eðlismassanum er ekki skilgreind milli þessara tveggja agna. Þetta leiðir síðan til þess að allar þær hlutfleijuföfnur, sem innihalda eðlismassa eða afleiðu af eðlismassanum, eru ógildar í tilsvareandi punkti. Rúmmál agnarinnar verður að vera það stórt⁵ að hægt sé að fá vel skilgreint meðaltal í eðlismassa hennar. Með vel skilgreindu meðaltali er átt við að fjöldi sameinda inni í ögninni er orðin það mikill að “mjög lítil” breyting á fjölda þeirra á sér stað, þegar farið er frá einni ögn yfir í þá næstu, þannig að breytingin á eðlismassanum milli þessa tveggja agna verður samfelld.



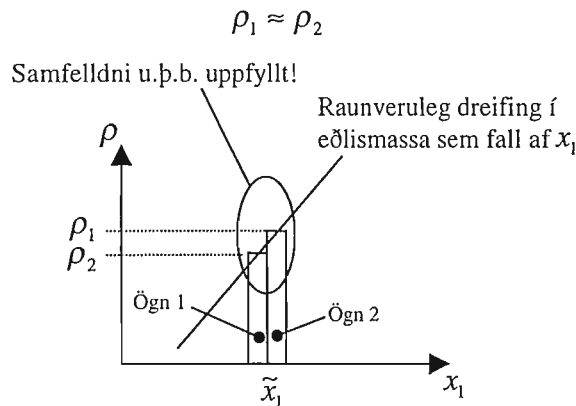
Mynd A.1: Ögn kerfis samanstendur alltaf af sama efninu.

⁵ Þ.e. innihaldi nógu mörg atóm.

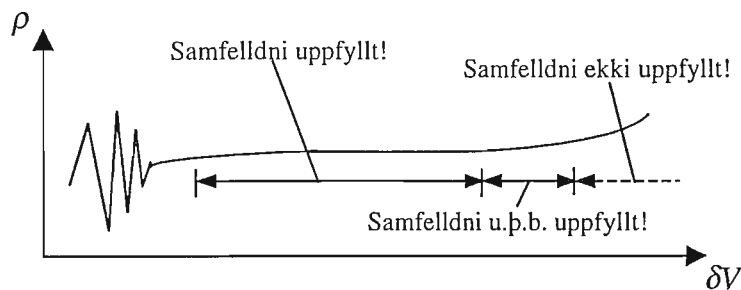
Hægt er að auka rúmmál agnarinnar, δV , það mikið að samfelldni verður ekki lengur uppfyllt: Eins og áður sagði, byggir hugmyndafræði samfelldra efna á því að finna breytingu milli agna en ekki inni í þeim og því er eðlismassinn meðhöndlaður sem fasti inni í henni. Ef eðlismassastigull er til staðar í tilsvarandi kerfi (það er $\bar{V}\rho \neq 0$), verður að gæta þess að rúmmál agnarinnar sé ekki orðið það stórt að aukaleg breyting í rúmmáli þess, breyti eðlismassa hennar, þar sem það getur leitt til ósamfelldni milli tveggja agna eins og mynd A.2 sýnir. Slík ósamfelldni leiðir til þess að jöfnur (A.1.1) til (A.1.3) eru ekki lengur gildar í punkti \tilde{x}_1 . Mynd A.3 sýnir það sama og áður nefnd mynd nema að þar er samfelldni nokkurn veginn uppfyllt: Nefnarinn í markgildinu (A.1.4) stefnir á núll fyrir bæði tilfellin í mynd A.2 og 1.3, en aðeins fyrir tilfellið í mynd A.3 fer teljarinn einnig að stefna á núll og þar af leiðandi fer samfelldni að verða uppfyllt.



Mynd A.2: Samfelldni ekki uppfyllt.



Mynd A.3: Samfelldni uppfyllt.



Mynd A.4: Eðlismassi agnar sem fall af stærð hennar.

Í stuttu máli: Rúmmál samfelldrar efnisagnar má alls ekki vera of lítið eða of stórt, því að þá er samfelldni ekki uppfyllt. Afleiðing þess er að ekki er hægt að nota hlutfleijöfnur við lausn á vandamáli margra agna kerfis. Mynd A.4 sýnir skissu af væntanlegri breytingu á eðlismassa með stærð agnar δV [Brown, 1990], [Gerhart et. al., 1992].

Framsetning Eulers og Lagrange⁶

Þegar samfelld eigni verður fyrir bjögun eða flæði, þá þá færast mismunandi agnir til meðfram mismunandi ferlum í rúmi kerfisins. Hnitin sem sérhver ögn hefur á tíma t , eru eftir ákveðna færslu [Mase, 1970]:

$$x_i = x_i(X_j, t) \quad (\text{A.2.1})$$

X_i er hnit agnarinnar á tíma $t = 0$, það er $X_i \equiv x_i|_{t=0}$ og með því er hægt að merkja hverja einustu ögn kerfisins. Þessi framsetning er kennd við *Lagrange (franskur stærðfræðingur J. L. deLagrange, 1736-1813)*. Hægt er líta á jöfnu (A.2.1) sem eintæka⁷ vörpun frá upphafsstaðsetningu agnarinnar yfir á núverandi hnit hennar (það er við tíma t). Einnig er hægt að lýsa bjöguninni eða flæðinu á forminu [Mase, 1970]:

$$X_i = X_i(x_j, t) \quad (\text{A.2.2})$$

Þessi lýsing er kölluð *framsetning Eulers (eftir svissneska stærðfræðinginn L. Euler, 1707-1783)*. Í þessu riti eru X_p og x_p meðhöndluð sem aðskilin, en þó samfallandi, hnitakerfi. Athuga ber að nú er staðsetning agnarinnar á tíma t , gefin sem óháða stærðin. Þar sem jafna (A.2.2) lýsir einnig eintækri vörpun frá núverandi hnitum agnarinnar yfir á upphafshnit hennar, eru varpanirnar í jöfnu (A.2.1) og (A.2.2) ótvíræðar andhverfur hvorar annarrar. Nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að andhverfan sé til, er að Jacoby-ákveðan (jafna (A.2.3)) sé ekki núll [Mase, 1970].

$$J \equiv J^L(X_p, t) \equiv \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) \quad \text{og} \quad J^{-1} \equiv J^E(x_p, t) \equiv \det\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \quad (\text{A.2.3})$$

Framsetning Lagrange í jöfnu (A.2.1) lýsir núverandi staðsetningu tilviljunarkenndrar agnar (merktrar) með upphafshnitum X_p . Stærðin $\varphi_{ij}^L = \varphi_{ij}^L(X_p, t)$ lýsir á sama hátt gildi breytustærðarinnar φ_{ij} (tilviljunarkenndrar) agnar merktar með upphafshnitinu X_p . Hægt er að fylgja *ákveðinni* ögn samtímis því, að skoðað er hvernig breytistærðin φ_{ij} breytist fyrir hana með tíma, með því að setja skilyrðið $X_p = \text{fasti}_p$. Með:

$$\varphi_{ij}^L(X_p, t)|_{X_p}$$

þá er gildið φ_{ij} skoðað fyrir ákveðna ögn sem hefur ein og aðeins ein ákveðin upphafshnit:

⁶ Þeir sem hafa frekari áhuga á mismuni milli framsetninga Eulers og Lagranges er eindregið bent á bókina eftir Mase (sjá heimildaskrá). Þar er farið dýpra í þessi fræði en gert er hér.

⁷ Vörpunin er eintæk (one-to-one), því við gerum ráð fyrir að ögn með upphafsstaðsetningu X_i fari á eina og aðeins eina staðsetningu x_i , og öfugt því við gerum ráð fyrir því að tvær mismunandi agnir geti ekki verið á sama stað á sama tíma.

$$X_i \equiv x_i|_{t=0} = \text{fasti}_i$$

Athugið að:

$$\frac{dX_i}{dt} \equiv \frac{d(x_i|_{t=0})}{dt} = \frac{d(\text{fasti}_i)}{dt} = 0 \neq \frac{dx_i}{dt}|_{t=0} = v_i|_{t=0}$$

Framsetning Eulers beinist að núverandi hnitum tilviljunarkenndrar agnar í stað upphafshnita hennar. Þetta sést á jöfnu (A.2.2), hún lýsir hvaðan agnirnar koma⁸ sem fara í gegnum punkt x_i á tíma t . Stærðin $\varphi_{ij}^E = \varphi_{ij}^E(x_p, t)$ lýsir á sama hátt gildi breytistærðarinnar φ_{ij} í tilviljunarkenndu hnuti x_i . Hægt að líta á ákveðið hnit samtímis því, að skoðað er hvernig breytustærðin φ_{ij} breytist fyrir hana með tíma, með því að setja skilyrðið $x_p = \text{fasti}_p$,

$$\varphi_{ij}^E(x_p, t)|_{x_p}$$

Þar sem jöfnur (A.2.1) og (A.2.2) eru andhverfur hvorar annarrar má rita:

$$\varphi_{ij}^L(X_p, t) = \varphi_{ij}^L(X_p(x_q, t), t) = \varphi_{ij}^E(x_q, t) \quad (\text{A.2.4})$$

Þó svo að jafna (A.2.4) sé fullgild, þá eru föllin φ_{ij}^L og φ_{ij}^E ekki með sama form, það er $\varphi_{ij}^L(n_q, t) \neq \varphi_{ij}^E(n_q, t)$ ⁹, þar sem n_q eru einhver hnit í rúmi kerfisins. Diffrun jöfnu (A.2.4) með tilliti til tíma og notkun almennra reglna stærðfræðigreiningar um diffur, gefur eftirfarandi:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{ij}^E(x_p, t)}{dt} &= \frac{d\varphi_{ij}^L(X_p, t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial \varphi_{ij}^L(X_p, t)}{\partial t} \Big|_{x_p} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \varphi_{ij}^L(X_p, t)}{\partial X_p} \Big|_t \frac{dX_p}{dt} = \frac{\partial \varphi_{ij}^L(X_p, t)}{\partial t} \Big|_{x_p} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

Síðasta niðurstaðan fékkst út frá eftirfarandi: Þar sem sérhver ögn kerfisins getur haft eina og aðeins eina upphafsstaðsetningu, það er $X_p = \text{fasti}_p$, þá verður afleiðan að vera núll: $dX_p/dt = 0$.

Síðasti hluti jöfnu (A.2.5) er breyting á stærðinni φ_{ij} með tillit til tíma í ákveðinni ögn sem fylgt er eftir. Þetta sést þar sem hlutfleiðan, í síðasta hluta jöfnu (A.2.5), er með tillit til tíma við fast X_p sem skilyrði. Með öðrum orðum: Við upphaf tímans ($t = 0$) er ákveðin ögn merkt með upphafshnitum hennar $X_p = \text{fasti}_p$. Þess vegna er fylgt eftir ögninni samtímis því að skoðað er hvernig stærðin φ_{ij} breytist inni í henni (með tillit til tíma) með því að viðhalda $X_p = \text{fasti}_p$ skilyrðið. Ef þessi niðurstaða er skoðuð með tillit til vinstri hliðar jöfnu (A.2.5), þá sést að afleiðan d/dt ¹⁰ lýsir því hvernig ástandsstærðin φ_{ij} breytist inni í ákveðni ögn meðan henni er fylgt eftir í kerfinu, *óháð framsetningu Lagranges eða Eulers*.

Diffrun hægrri hliðar jöfnu (A.2.4) með tilliti til tíma, gefur:

⁸ Þ.e. hvaða X_i hnit ögnin hefur þegar hún fer um hnutið x_i á tíma t .

⁹ Mismunurinn á þessum tveim föllum er ítrekaður með veldismerkinu L (Lagrange) og E (Euler).

¹⁰ Stundum nefnd heildarafleiða frá enska orðinu: total derivative. Einnig nefnt á ensku sem: material derivative, substantial derivative eða eulerian derivative.

$$\frac{d\varphi_{ij}^E(x_p, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \varphi_{ij}^E(x_p, t)}{\partial t} \right|_{x_p} + \left. \frac{\partial \varphi_{ij}^E(x_p, t)}{\partial x_p} \right|_t \frac{dx_p(X_q, t)}{dt} \quad (\text{A.2.6})$$

Nú er

$$v_p^L(X_q, t) = \frac{dx_p(X_q, t)}{dt} = \left. \frac{\partial x_p(X_q, t)}{\partial t} \right|_{x_q}$$

hraði ákveðinnar agnar sem merkt er með upphafshnitunum $X_p = \text{fasti}_p$. Samanber jöfnu (A.2.4) þá er $v_p^L(X_q(x_r, t), t) = v_p^E(x_r, t)$ og verður jafna (A.2.6) eftirfarandi:

$$\frac{d\varphi_{ij}^E(x_p, t)}{dt} = \left. \frac{\partial \varphi_{ij}^E(x_p, t)}{\partial t} \right|_{x_p} + \left. \frac{\partial \varphi_{ij}^E(x_p, t)}{\partial x_p} \right|_t v_p^E(x_q, t) \quad (\text{A.2.7})$$

Í ritgerð þessari er oftast notast við framsetningu Eulers.

VIÐAUKI B : VARÐVEISLA MASSANS

Ef tiltekið er samansafn agna¹¹ í rúmmáli $V = V(t)$, þá er V nefnt efnisrúmmál (material volume) og verður ávallt að samanstanda af þessum sömu ögnum. Þetta skilyrði verður að vera uppfyllt, ef hægt á að vera að beita varðveislulögmálunum þremur á efnisrúmmálið. Hreyfist það um í kerfinu (með tíma) og breytir þar af leiðandi sífellt um form og rúmmál. Massinn í efnisrúmmáli er gefinn með:

$$m = \int_{V(t)} \rho dV \quad (\text{B.1.1})$$

Hugmyndafræði samfelldra efna, gerir ráð fyrir að engin eyðing eða myndun massa eigi sér stað inni í $V(t)$:

$$\left. \frac{\partial m(X_p, t)}{\partial t} \right|_{x_p \in V(0)} = 0 \quad (\text{B.1.2})$$

Með jöfnu (A.2.5), í viðauka A, er hægt að rita ofangreinda jöfnu sem:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (\text{B.1.3})$$

og er hún þá gild bæði í framsetningu Eulers og Lagranges. Í sumum bókum hefur jafna (B.1.3) verið benduð eingöngu við framsetningu Lagranges, en það verður sýnt á eftir að svo sé ekki. Dæmi um slíka villu má sjá hjá Holton í kafla 2.5.2 [Holton, 1992] “A *Lagrangian derivation*”. Þar telur höfundur sig vera kominn sjálfkrafa í framsetningu Lagranges með því að beita jöfnu (B.1.3) hér að ofan. En í raun er hann að beita setningu Leibniz á mjög einföldu formi (í framsetningu Eulers). Í kaflanum sem hann nefnir “A *Eulerian derivation*” er verið að beita reglu sem nefnist “the transport theorem” [Gerhart et. al., 1992] (áfram í framsetningu Eulers). Villan sem hann gerir er að rugla saman fyrrgreindri jöfnu við jöfnu (B.1.2), en aðeins með jöfnu (B.1.2) er búið að fastsetja kerfið í framsetningu Lagranges. Það er alveg hægt að fyrirgefa þessa villu sem hann gerir í upphafi þessa tiltekna kafla, því að vörpunin frá heildarafleiðunni yfir í þá sem gildir fyrir Lagrange er svo einföld miðað við vörpun yfir í þá sem gildir fyrir Euler (sjá jöfnu (A.2.5) og (A.2.7)):

$$\begin{aligned} \text{Lagrange:} & \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_p} \\ \text{Euler:} & \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x_p} + v_p^E(x_p, t) \frac{\partial}{\partial x_p} \Big|_t \end{aligned}$$

Varðveisla massans í framsetningu Lagrange

Massi efnisrúmmáls $V(0) = V_0$ við upphafstíma $t = 0$ er gefinn með¹²:

¹¹ Með hugtakinu ögn er átt við, eins og áður, samfellda efnisögn.

¹² Þar sem $X_i \equiv x_i|_{t=0}$, þá er augljóst að $J(X_p, 0) = 1$.

$$m_1 = \int_{V_0} \rho^L(X_p, 0) dV_0 = \int_{V_0} \rho^L(X_p, 0) |J^L(X_p, 0)| dV_0$$

Massi efnisrúmmálsins $V(t)$ við seinni tíma er gefinn með:

$$m_2 = \int_{V(t)} \rho^E(x_p(X_p, t), t) dV = \int_{V(t)} \rho^L(X_p, t) dV = \int_{V_0} \rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)| dV_0$$

Við framsetningu á ofangreindri jöfnu er fyrst notast við jöfnu (A.2.4) og síðan hnitaskiptareglu við heildun úr almennri stærðfræðigreiningu. Samkvæmt jöfnu (B.1.3) verður eftirfarandi að gilda:

$$m_1 = m_2 \quad \forall \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0} \rho^L(X_p, 0) |J^L(X_p, 0)| dV_0 = \int_{V_0} \rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)| dV_0$$

Þar sem rúmmál V_0 er tilviljunarkennt, er hægt að nota lemmu *duBois-Reymonds*, sem gefur eftirfarandi:

$$\rho^L(X_p, 0) |J^L(X_p, 0)| = \rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)| \quad \forall t \geq 0$$

Eða með öðrum orðum¹³

$$\frac{d(\rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)|)}{dt} = 0 \quad (\text{B.1.4})$$

Varðveisla massans í framsetningu Eulers

Með jöfnum (B.1.1) og (B.1.3) fæst¹⁴:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^E(x_p, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} \rho(v_i n_i) dS = \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right\} dV = 0$$

Í þessari jöfnu er setning Leibniz notuð og síðan setning Gauss. Í setningu Leibniz þá er hraðavigurinn v_i hraði jaðars heildisins $\partial V(t)$ sem er þá jafn hraða agnar á sama stað (samanber $V = V(t)$ samanstendur alltaf af sömu ögnunum), þannig að $v_i = v_i^L(X_j, t)$. Með því að nota jöfnu (A.2.4) og lemmu *duBois-Reymonds*, þá fæst:

$$\frac{\partial \rho^E(x_p, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^E(x_p, t) v_i^E(x_p, t))}{\partial x_i} = 0$$

Með hjálp jöfnu (A.2.7) er hægt að rita þessa jöfnu á forminu:

$$\frac{d\rho^E(x_p, t)}{dt} + \rho^E(x_p, t) \frac{\partial v_i^E(x_p, t)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.1.5})$$

Héðan í frá verður ávallt unnið í framsetningu Eulers, þannig að hægt er að rita ofangreinda jöfnu einfaldlega:

¹³ Í sumum bókum (til dæmis Hunter) er nefnt að Jacoby ákveða er alltaf stærri en núll, innan fræða samfelldra efna, þannig að tölugildis táknið í ofangreindri jöfnu er óþarft. Höfundur hefur hins vegar ekki séð neina haldbæra sönnun á þessu og lætur því tölugildistáknið vera til staðar.

¹⁴ Með hjálp depilfeldis (dot product): $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_p \vec{i}_p \cdot n_q \vec{i}_q = v_p n_q (\vec{i}_p \cdot \vec{i}_q) = v_p n_q \delta_{pq} = v_p n_p \equiv v_q n_q$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

án þess að það valdi nokkrum ruglingi.

Í hvert sinn sem lemma duBois-Reynolds er notuð þá er tilsvaramandi lögmáli beitt á ögn í stað efnisrúmmáls. Það er auðvelt að sjá þetta þegar beitt er hefðbundnari útleiðsluáðferð: Skilgreint er ferhyrnt rúmmál (ekki efnisrúmmál!) með hliðar Δx_p , einum af varðveislulögmálunum þremur er síðan beitt á þetta rúmmál, Taylor-raðir notaðar til að koma hugmyndafræðinni¹⁵ á stærðfræðilegt form. Síðan er $\Delta x_p \rightarrow 0$, eða réttara sagt $\Delta x_p \rightarrow \delta_p$, því stærð agnarinnar $\delta_p = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ er í raun mesta upplausn eða hin minnsta endanlega stærð sem kerfið hefur upp á að bjóða. En þar sem $\delta_p = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ er margfalt minna en stærð kerfisins er í lagi að hugsa sér að Δx_p stefni á eiginlegt núll. Dæmi um þessa aðferð má sjá í kafla 5.2.1 og 5.4.1 í bók eftir Gerhart, Cross og Hochstein [Gerhart et. al., 1992]. Með ofangreindri útleiðsluáðferð er verið að nota setningu sem nefnist “the transport theorem” [Gerhart et. al., 1992] og þess vegna er ekki notast við efnisrúmmál.

Vörpun frá framsetningu Eulers yfir í framsetningu Lagranges

Við byrjum með jöfnu (B.1.5) að ofan og notum jöfnur (A.2.4) og (A.2.5):

$$\frac{d\rho^E(x_p, t)}{dt} + \rho^E(x_p, t) \frac{\partial v_i^E(x_p, t)}{\partial x_i} = \frac{d\rho^L(X_p, t)}{dt} + \rho^L(X_p, t) \frac{\partial v_i^E(x_p, t)}{\partial x_i} = 0$$

og margföldum síðan þessa jöfnu með tölugildinu af jöfnu (A.2.3) og fáum:

$$|J^L(X_p, t)| \frac{d\rho^L(X_p, t)}{dt} + \rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)| \frac{\partial v_i^E(x_p, t)}{\partial x_i} = 0$$

Hægt er að sýna fram á að eftirfarandi gildir [Mase, 1970]:

$$\frac{\partial v_i^E(x_p, t)}{\partial x_i} = \frac{1}{|J^L(X_p, t)|} \frac{\partial |J^L(X_p, t)|}{\partial t}$$

þannig að nú fæst (sjá jöfnu (A.2.5)):

$$\begin{aligned} |J^L(X_p, t)| \frac{d\rho^L(X_p, t)}{dt} + \rho^L(X_p, t) \frac{\partial |J^L(X_p, t)|}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \rho^L(X_p, t) |J^L(X_p, t)| \right\} &= 0 \end{aligned}$$

¹⁵ Það er tilsvaramandi lögmál.

VIÐAUKI C : VARÐVEISLA SKRIÐPUNGANS

Lögmálið er einnig þekkt undir nafninu annað lögmál Newtons. Í hreinu tregðukerfi er lögmálið eftirfarandi (sjá jöfnu (A.2.7)):

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \quad (C.1)$$

þar sem p_i er skriðþungi massans innan rúmmálsins $V(t)$:

$$p_i = \int_{V(t)} \rho v_i dV \quad (C.2)$$

og F_i er summa raunverulegra krafta¹⁶ sem verka á massann inni í $V(t)$, gefin með

$$F_i = \int_{\partial V(t)} t_i dS + \int_{V(t)} \rho b_i dV \quad (C.3)$$

dS er flatamálsdiffur af efnisrúmmálinu $V(t)$, b_i er ytri kraftur á massaeiningu sem verkar á allar agnir inni í $V(t)$ og t_i er spennukraftur (á flatareiningu) sem verkar á flötinn $\partial V(t)$, gefinn með fyrsta spennulögmáli Cauchy:

$$\bar{t} = \bar{n} \cdot \sigma = n_j \bar{t}_j \cdot \sigma_{qi} \bar{t}_q \bar{t}_i = n_j (\bar{t}_j \cdot \bar{t}_q) \sigma_{qi} \bar{t}_i = n_j \delta_{jq} \sigma_{qi} \bar{t}_i = n_j \sigma_{ji} \bar{t}_i = t_i \bar{t}_i \quad (C.4)$$

n_j er einingavigur normalt á flötinn $\partial V(t)$ og σ_{ij} er spennutensorinn fyrir efnið sem unnið er í. Jafna (C.4) er oftast rituð án vigurs, einfaldlega sem $t_i = n_j \sigma_{ji}$. Almennt gildir að:

$$n_j \sigma_{ji} \bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j \bar{t}_i$$

en

$$n_j \sigma_{ji} \bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j \bar{t}_i$$

gildir þá og því aðeins að $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Margfeldi í staki tensors má skipta um að vild, en sjálfir vigarnir í þinfeldinu¹⁷ má aldrei skipta, því þau vísa í sæti tilsvarandi fylkis:

$$C_{ij} \bar{t}_i \bar{t}_j \equiv a_i b_j \bar{t}_i \bar{t}_j \equiv b_j a_i \bar{t}_i \bar{t}_j \neq b_j a_i \bar{t}_j \bar{t}_i$$

Af jöfnu (C.4) er augljóst að seinni vísirinn i í spennutensorum σ_{ji} vísar í kraftstefnu vigursins t_i og sá fyrri, j vísir í normalstefnu þess flatar sem þessi kraftur verkar á. Sumir höfundar hafa ritað það þveröfugt, sem er í sjálfru sér einnig rétt. En stærðfræðileg afleiðing þessa er engin, því spennutensorinn er samhverfur (sjá umræðu í kafla 4).

Sem dæmi um spennutensor má rita þann sem gildir fyrir almennt þrívítt Stokes-flæði ("Stokesian fluid" eða "non-Newtonian fluid"), í framsetningu Eulers [Mase, 1970]:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \kappa (\dot{\epsilon}_{ij}) \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu (\dot{\epsilon}_{ij}) \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) \quad (C.5)$$

- p er stefnusnaður þrýstingur.

¹⁶ Með raunverulegum kröftum er átt við alla þá krafta sem hlíða 3.L.N. Dæmi um krafta sem eru ekki raunverulegir, heldur flokkast undir s.k. gervikrafta eru til dæmis Coriolis krafturinn og miðflóttakrafturinn. Þessir kraftar "fæðast" sjálfkrafa frá vinstri hlið jöfnu (C.1) þegar við færum okkur í kerfi sem er ekki tregðukerfi (non inertial reference frame).

¹⁷ Lesandi má alls ekki rugla saman þinfeldi $\bar{t}_i \bar{t}_j$ við depilfeldi $\bar{t}_i \cdot \bar{t}_j = \delta_{ij}$, það er $\bar{v} \bar{v} = v_p \bar{t}_p v_q \bar{t}_q = v_p v_q \bar{t}_p \bar{t}_q = C_{pq} \bar{t}_p \bar{t}_q$, en $\bar{v} \cdot \bar{v} = v_p \bar{t}_p \cdot v_q \bar{t}_q = v_p v_q \bar{t}_p \cdot \bar{t}_q = v_p v_p \equiv v_q v_q = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3$.

- $\dot{\epsilon}_{ij}$ er bjögunarhraðatensor, en um hann verður rætt í kafla 4.
- $\kappa = \kappa(\dot{\epsilon}_{ij})$ er rúm-seigja fyrir Stokes-flæði (Stokesian bulk viscosity).
- $\mu = \mu(\dot{\epsilon}_{ij})$ er sker-seigja fyrir Stokes-flæði (Stokesian shear viscosity).
- $\kappa = \text{fasti}$, er rúm-seigja fyrir Newtonskt-flæði (Newtonian bulk viscosity).
- $\mu = \text{fasti}$, er sker-seigja fyrir Newtonskt-flæði (Newtonian shear viscosity).
- $\dot{\epsilon}_{ij} - (\dot{\epsilon}_{kk}/3)\delta_{ij}$ er sker-bjögun agnar, án rúmmálsbreytinga í þremur víddum.
- $\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}$ er rúmmáls-bjögun agnar, án formbreytingar.

Gildin κ og μ eru fastar fyrir Newtonskt streymi (Newtonian fluid). Ef jöfnur (C.2), (C.3) og (C.4) eru settar í jöfnu (C.1) og setningu Leibniz síðan beitt eins og gert er í viðauka B, þá fæst:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} (\rho v_i) v_j n_j dS = \int_{V(t)} \rho b_i dV + \int_{\partial V(t)} \sigma_{ji} n_j dS$$

Með setningu Gauss fæst nú:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right\} dV &= \int_{V(t)} \left\{ v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right\} dV = \\ &= \int_{V(t)} \left\{ \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right\} dV \end{aligned}$$

Með jöfnu (A.2.6), (B.1.5) og lemmu duBois-Reynolds verður ofangreind jafna nú:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (\text{C.6})$$

Þetta er almenn hreyfijafna fyrir samfelld efni. Þegar átt er við fast efni (ekki vökvakennt) þá er áhugaverðara að skoða færsluna $u_i = x_i - X_i$ frekar en hraðann v_i . Hröðunarliðurinn í ofangreindri jöfnu verður þá:

$$\frac{dv_i^E(x_p, t)}{dt} = \frac{dv_i^L(X_p, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i(X_p, t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d(u_i + X_i)}{dt} \right) = \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_i^L(X_p, t)}{\partial t^2} \Big|_{x_p}$$

Þannig að hreyfijafna burðarþolsfræðinnar og annarra klassískra fastefnafræða verður:

$$\rho^L \frac{\partial^2 u_i^L}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}^L}{\partial x_j} + \rho^L b_i^L \quad \text{eða} \quad \rho^E \frac{d^2 u_i^E}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}^E}{\partial x_j} + \rho^E b_i^E$$

Jafna (C.6) er gild fyrir hreint tregðukerfi (inertial frame). Þar sem þessari jöfnu verður beitt á yfirborð jarðar, verður að gera aukalegar ráðstafanir. Þar sem jörðin er þá á snúningi er yfirborðið ekki hreint tregðukerfi. Sá liður sem verður að athuga í jöfnu (C.6) er tregðukrafturinn (þ.e. hröðunarliðurinn). Hröðunarliðurinn myndar aukalega gervikrafta eins og Coriolis- og miðflóttakraftinn, þegar farið er frá hreinu tregðukerfi yfir í hnitakerfi sem snýst með fastan snúningshraða $\Omega_i = \Omega \delta_{i3}$ um x_3 ásinn en því verður ekki lýst nánar hér.

Útleiðsluna má sjá í flestum inngangsbókum um hreyfifræði lofthjúps jarðar. Ég mæli þó með bókinni eftir Holton [Holton, 1992]. Jafna (C.6) fyrir yfirborð jarðar er:

$$\rho \left(\frac{dv_i}{dt} + 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k + f_i(\Omega_j, R_\oplus, \phi) \right) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho(\tilde{b}_i + g_i^*)$$

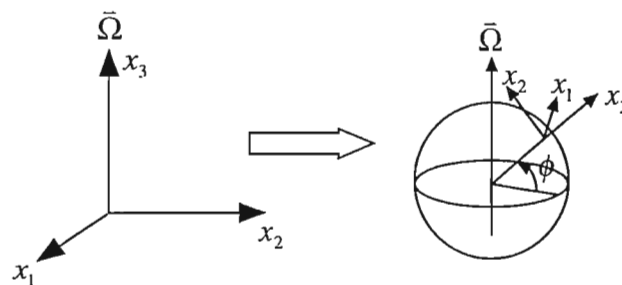
- $2\varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k$ er Corioliskraftur á massaeiningu.
- ϕ er breiddargráðan.
- $f_i(\Omega_j, R_\oplus, \phi)$ er miðflóttarkraftur á massaeiningu.
- R_\oplus er meðalradíus jarðar.
- $\Omega_i = \Omega \delta_{i3}$ er snúningsvigur jarðar í einingunni $rad\ s^{-1}$. Hér er x_3 ásinn í stefnu hverfiþunga jarðar, sjá mynd C.2.
- ε_{ijk} er umröðunartáknið (permutation symbol).
- g_i^* er raunveruleg þyngdarhröðun skv. þyngdarlögmáli Newtons og stefnir hún í átt að miðju jarðar. Athugið að stefna hennar er ekki normal við yfirborð, því jörðin er ekki fullkomin kúla.
- $\tilde{b}_i = b_i - g_i^*$ er summa ytri krafta annarra en þyngdarhröðunar.

Við dálitla umröðun ofangreindrar jöfnu fæst:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho \tilde{b}_i + \rho g_i \quad (\text{C.7})$$

- $g_i = g_i^* - f_i(\Omega_j, R_\oplus, \phi)$ er virk þyngdarhröðun sem verkar á yfirborði jarðar. Stefna hennar er normal við yfirborð jarðar.

Nú þarf að taka jöfnu (C.7) og varpa henni á yfirborð jarðar eins og Mynd C.2 sýnir:



Mynd C.2: Hreyfijafnan verður að gilda við yfirborð jarðar.

Þessi vörpun er töluvert meiri handavinna en sú ofangreinda og mun ég ekki heldur fara í gegnum hana hér. Aftur bendi ég á bókina eftir Holton fyrir áhugasama lesendur [Holton, 1992]. Eftir að þessi vörpun er gerð, fer jafnan í gegnum svokallaða stærðargráðugreiningu (scale analysis) til að henda út ónaúðsynlegum liðum jöfnunnar. Þetta er gert því jafnan í öllu sínu veldi er torleysanleg. Eftir vörpunina og stærðargráðugreininguna verður jafna (C.6) eftirfarandi:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho \tilde{b}_i - \rho g \delta_{3i} \quad (\text{C.8})$$

Þar sem hafísinn er meðhöndlaður sem tvívítt efni, þá eru bara fyrstu tvær víddirnar í ofangreindri jöfnu notaðar, það er skrifað er $i, j, k = 1, 2$ í stað $i, j, k = 1, 2, 3$. Ytri kraftar sem verka á hafísinn eru skerspenna frá vindstraumum τ_i^{air} , skerspenna frá hafstraumum τ_i^{wat} og þyngdarkraftur vegna halla hafflatar:

$$\rho \tilde{b}_i = \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i}$$

- ξ er hæð hafflatar og svarar hún til barotropískra hafstrauma, það er þrýstistrauma (geostrophic currents) [Pond & Pickard, 1983]:

$$v_i^{G-wat} = \varepsilon_{i3k} \frac{g}{f^c} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \Leftrightarrow \bar{v}_i^{G-wat} = \bar{i}_3 \times \frac{g}{f^c} \nabla \xi$$

- τ_i^{air} er skerspenna frá vindum yfir á hafís.
- τ_i^{wat} er skerspenna frá barotropískum hafstraumi yfir á hafís.
- $f^c = 2\Omega \sin(\phi)$ er stuðull Coriolis.

Út frá ofangreindu er annað lögmál Newtons, fyrir tvívítt samfellt efni, í tveimur víddum eftirfarandi:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho f^c \varepsilon_{i3k} v_k + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \tau_i^{air} + \tau_i^{wat} - \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad (\text{C.9})$$

Þar sem hafísinn er meðhöndlaður sem tvívítt efni er eðlismassinn ρ , massi á flatareiningu í stað massa á rúmmálseiningu:

$$\rho = \rho(x_p, t) = \rho_{ice} \cdot H(x_p, t) \quad (\text{C.10})$$

- ρ_{ice} er eðlismassi hafíss og er hann meðhöndlaður sem fasti í líkaninu.
- $H(x_p, t)$ er eins og í viðauka B, raunveruleg þykktardreifing hafíss í kerfinu við augnablikið t og hnit x_p . Í líkaninu er jafna (B.1.14) notuð til að nálga ísþykktina. Hér er ísþykktin H búinn að taka við af eðlismassanum ρ sem lýsingu á massadreifingu.

VIÐAUKI D : VARÐVEISLA ORKUNNAR

Lítum nú sem snöggvast á jöfnu (C.6): Ef gert er ráð fyrir að eini ytri krafturinn sem verkar á agnir kerfisins sé virk þyngdarhröðun, þá er hægt að rita [Holton ,1992]:

$$b_i = g_i = -g\delta_{3i} = -\frac{\partial\Phi(x_3)}{\partial x_i} \quad (D.1)$$

þar sem Φ er stöðuorka á massaeiningu og er þetta mætti aðeins háð x_3 hnitinu, því stefna virkrar þyngdarhröðunar er normalt við yfirborð jarðar. Með því að margfalda jöfnu (C.6) með hraðavigrinum v_i fæst eftir smávægilegar tilfæringar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i^2}{2} + \Phi\right) = \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (D.2)$$

Jafna (D.2) lýsir aflfræðilegri orkuvarðveislu agnarinnar. Heildarorka efnisrúmmáls $V(t)$ er gefin með:

$$K + U = \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho v_i v_i dV + \int_{V(t)} \rho u dV$$

Diffrun heildarorkunnar með tilliti til tíma gefur:

$$\frac{d(K+U)}{dt} = \int_{V(t)} \left\{ \rho \frac{d(v_i^2/2 + u)}{dt} + (v_i^2/2 + u) \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \right\} dV \quad (D.3)$$

Í seinni hluta ofangreindrar jöfnu er notuð setning Leibniz og Gauss. Samanber jöfnu (B.1.5) hverfur síðasti liður í ofangreindu heildi. K er hreyfiorka efnisrúmmálsins og U er innri orka þess, en u er innri orka samfelldrar efnisagnar á massaeiningu. Varmabreyting á tímaeiningu, inni í $V(t)$, er gefin með:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V(t)} \rho \dot{h} dV - \int_{\partial V(t)} \dot{q}_i n_i dS = \int_{V(t)} \left\{ \rho \dot{h} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} \right\} dV \quad (D.4)$$

þar sem \dot{q}_i er varmaflæði á tímaeiningu um jaðar efnisrúmmáls og \dot{h} er innri varmamyndun eða útdráttur á tímaeiningu vegna efnafræðilegra ferla. Varmaflæði um $\partial V(t)$ er gefin með lögmáli Fouriers:

$$\dot{q}_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

þar sem k_{ij} er varmaleiðnitensorinn. Ef tilsvarendi efni er stefnusnautt og einsleitt þá fæst:

$$\dot{q}_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = -(k\delta_{ij}) \frac{\partial T}{\partial x_j} = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Vinna á tímaeiningu sem er unnin af umhverfinu á $V(t)$ ¹⁸ er gefin með:

¹⁸ Þ.e. dW/dt reiknast jákvætt þegar vinna á sér stað frá umhverfi á $V(t)$.

$$\frac{dW}{dt} = \int_{v(t)} t_i v_i dS + \int_{v(t)} \rho b_i v_i dV = \int_{v(t)} \left\{ \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i \right\} dV \quad (\text{D.5})$$

Ég hef ritað dQ og dW í stað dQ og dW til að minna lesanda á að þessar stærðir eru ekki hreint diffur.

Fyrsta lögmál varmafræðinnar er hægt að rita á eftirfarandi hátt: Breyting heildarorkunnar $T = U + K$, inni í $V(t)$, með tilliti til tíma er jöfn breytingu á vinnu og varmamyndun, inni í $V(t)$, með tilliti til tíma: það er

$$\frac{d}{dt}[U + K] = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt}$$

Með jöfnu (D.3), (D.4) og (D.5) verður ofangreind hugmyndafræði:

$$\int_{v(t)} \rho \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} + \Phi + u \right) \right\} dV = \int_{v(t)} \rho \left\{ \dot{h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} \right\} dV + \int_{v(t)} \left\{ \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} \right\} dV$$

Með lemmu duBois-Reynolds fæst tilsvarendi jafna sem gildir fyrir samfellda efnisögn:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} + \Phi + u \right) = \dot{h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} \quad (\text{D.6})$$

Ef jafna (D.2) er dregin frá jöfnu (D.6) fæst jafna fyrir innri orku agnarinnar:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \dot{h} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{D.7})$$

Út af samhverfu spennutensorsins er hægt að rita:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \right) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{D.8})$$

Með því að beita jöfnu (C.5) á (D.8) fæst:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = -p \dot{\epsilon}_{kk} + \kappa (\dot{\epsilon}_{kk})^2 + 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} \delta_{ij} \right)^2$$

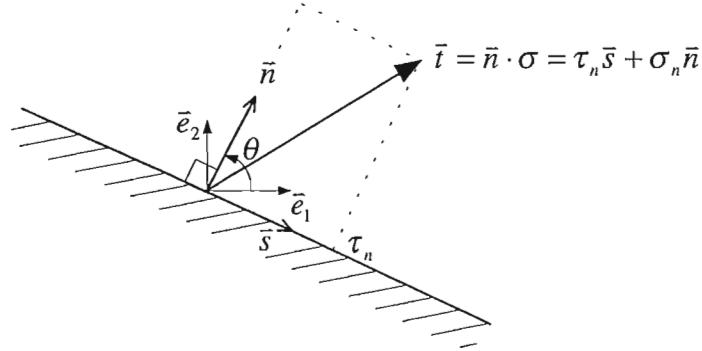
Síðustu tveir liðir jöfnunnar lýsa óafturkræfri ummyndun hreyfiorku samfelldrar efnisagnar yfir í innri orku hennar. Er þessi ummyndun vegna tilvistar hreyfistiguls $\partial v_i / \partial x_j \neq 0$ sem ögnin hefur og núnings $\sigma_{ij} \neq 0$ milli hennar og nágretta hennar. Þessi liður er samkvæmt öðru lögmáli varmafræðinnar alltaf stærri en núll [Mase, 1970]. Stærðin $-p \dot{\epsilon}_{kk}$ lýsir breytingu í innri orku samfelldra efnisagna vegna útvíkkunar ($\dot{\epsilon}_{kk} > 0$) eða samdráttar ($\dot{\epsilon}_{kk} < 0$) sem hún verður fyrir.

VIÐAUKI E : MOHR-HRINGURINN

Í þessum viðauka og þeim næsta er gert ráð fyrir að $\sigma_1 > \sigma_2$. Samkvæmt fyrsta spennulögmáli Cauchy, þá gildir:

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma \quad (\text{C.4})$$

Í tvívíðu rúmi er einfalt að þátta þennan kraft í tvo liði eins og Mynd E.6 sýnir:



Mynd E.6: Kraftur er verkar á tvívíðan flöt.

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma = \tau_n \vec{s} + \sigma_n \vec{n} \quad (\text{E.1})$$

\vec{e}_1 og \vec{e}_2 eru eiginvigrar spennutensorsins σ .

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 \quad \wedge \quad \vec{s} = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 \quad (\text{E.2})$$

Auðvelt er að sjá að eftirfarandi gildir

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma = \sigma_1 n_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 n_2 \vec{e}_2 = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 \quad (\text{E.4})$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 \quad (\text{E.5})$$

$$\tau_n^2 + \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 \quad (\text{E.6})$$

Með því að nota jöfnu (E.5) og (E.6) fæst

$$n_1^2 = \frac{\sigma_2 \sigma_n - (\tau_n^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_1 (\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (\text{E.7})$$

$$n_2^2 = \frac{-\sigma_1 \sigma_n + (\tau_n^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_2 (\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (\text{E.8})$$

og með jöfnu (E.3) fæst eftirfarandi:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n + \Pi)^2 = \Gamma^2 \quad (\text{E.9})$$

þar sem Π og Γ eru skilgreindar í jöfnu (3.1.10) og (3.1.11). Samanber Mynd E.6, þá gildir að:

$$\vec{n} = \cos(\theta) \vec{e}_1 + \sin(\theta) \vec{e}_2 \quad \text{og} \quad \vec{s} = \sin(\theta) \vec{e}_1 - \cos(\theta) \vec{e}_2 \quad (\text{E.10})$$

þannig að

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \sigma = \sigma_1 \cos(\theta) \vec{e}_1 + \sigma_2 \sin(\theta) \vec{e}_2 = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 \quad (\text{E.11})$$

Ef ofangreindum vigri er varpað á \vec{n} og \vec{s} (sjá jöfnu (E.10)), þá fæst:

$$\sigma_n = \bar{t} \cdot \bar{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (\text{E.12})$$

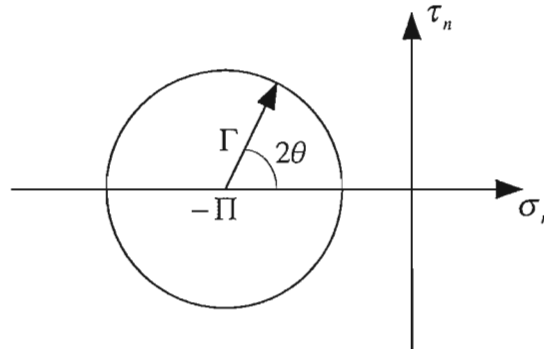
$$\tau_n = \bar{t} \cdot \bar{s} = t_1 \sin \theta - t_2 \cos \theta \quad (\text{E.13})$$

Með dálítilli algebra verða ofangreindar jöfnur:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) = -\Pi + \Gamma \cos(2\theta) \quad (\text{E.14})$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) = \Gamma \sin(2\theta) \quad (\text{E.15})$$

Ef ofangreindar jöfnur eru teiknaðar í $\sigma_n - \tau_n$ rúmi, þá fæst:

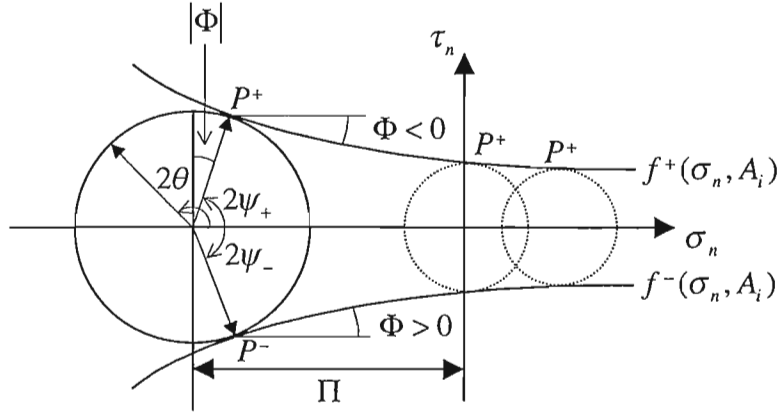


Mynd E.7: Mohr-hringurinn.

Hringurinn í ofangreindri mynd er kallaður “Mohr-hringur” og verður hann notaður óspart í næsta viðauka. Athugið að Mohr-hringur fyrir þrívítt kerfi samanstendur af þremur hringum raðað á ákveðinn hátt, en slíkt kerfi er ekki til umræðu hér heldur er áhugasömum bent á að lesa Mase [Mase ,1970].

VIÐAUKI F : GALLI Á HUGMYNDAFRÆÐI HIBLERS

Eigingildi spennutensorsins, σ_1 og σ_2 , eru háð íspéttleika, ísþykkt, hitastigi og svo framvegis. Þessi gildi eru táknuð með A_i , þar sem $i=1,2,3,\dots$. Normalspennuástandið er fall af fyrrgreindum eigingildum og horninu θ : $\sigma_n = \sigma_n(\sigma_1, \sigma_2, \theta)$.



Mynd F.8: Mengi Mohr-hringa mynda tvö flot-föll.

Punkturinn P^\pm er ákvarðaður þannig að tölugildið af flotfallinu $|f^\pm(\sigma_n)|$ verði sem stærst fyrir mengi Mohr-hringa, því það er einmitt hið mesta skerspennuþol hafíssins með tilliti til normalspennu hans $\sigma_n(\sigma_1(A_i), \sigma_2(A_i), \theta)$ sem er til umræðu hér. Hornin P^+ og P^- við σ_n ásinn eru rituð sem $2\psi_+ \in [0, \pi[$ og $2\psi_- \in [-\pi, 0[$. Fallið $f^\pm(\sigma_n)$ er þess vegna fengið út frá eftirfarandi jöfnu:

$$\tau_n(\sigma_n, \theta)|_{2\theta=2\psi_\pm} = \tau_n^{P^\pm}(\sigma_n) = f^\pm(\sigma_n) \quad (\text{F.1})$$

2θ er almennt horn í Mohr-hringnum og getur það haft hvaða gildi sem er. Ef $\tan(\Phi)$ er halli $f^\pm(\sigma_n)$ í punkti P^\pm , þá verður að gilda:

$$\frac{df^\pm(\sigma_n)}{d\sigma_n} = \tan(\Phi) \quad (\text{F.2})$$

Samanber myndina að ofan þá er Φ háð Π , það er $\Phi = \Phi(\Pi)$. Einnig gildir:

$$2\psi_\pm - \Phi \equiv \pm\pi/2 \quad (\text{F.3})$$

Almenn fræði um Mohr-hringi gefa:

$$\sigma_n(\sigma_1(A_i), \sigma_2(A_i), \theta) = \frac{\sigma_1(A_i) + \sigma_2(A_i)}{2} + \frac{\sigma_1(A_i) - \sigma_2(A_i)}{2} \cos(2\theta) \quad (\text{F.4})$$

$$\tau_n(\sigma_1(A_i), \sigma_2(A_i), \theta) = \frac{\sigma_1(A_i) - \sigma_2(A_i)}{2} \sin(2\theta) \quad (\text{F.5})$$

Mesta sker- og normalspennuástand efnis er hægt að rita sem:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1(A_i) - \sigma_2(A_i)}{2} &= \frac{\sigma_1(A_i)}{2} - \frac{\sigma_2(A_i)}{2} + \frac{\sigma_2(A_i)}{2} - \frac{\sigma_2(A_i)}{2} = \\ &= \frac{\sigma_1(A_i) + \sigma_2(A_i)}{2} - \sigma_2(A_i) = -(\Pi + \sigma_2(A_i)) = \Gamma(\Pi, A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma_1(A_i) + \sigma_2(A_i)}{2} &= -\frac{\sigma_1(A_i)}{2} - \frac{\sigma_2(A_i)}{2} + \frac{\sigma_1(A_i)}{2} - \frac{\sigma_1(A_i)}{2} = \\ &= \frac{\sigma_1(A_i) - \sigma_2(A_i)}{2} - \sigma_1(A_i) = -(\Gamma + \sigma_1(A_i)) = \Pi(\Gamma, A_i) \end{aligned}$$

Hægt er því að rita jöfnu (F.4) og (F.5) sem

$$\sigma_n(\Pi, \Gamma, \theta) = -\Pi(\Gamma, A_i) + \Gamma(\Pi, A_i) \cos(2\theta) \quad (\text{F.6})$$

$$\tau_n(\Gamma, \theta) = \Gamma(\Pi, A_i) \sin(2\theta) \quad (\text{F.7})$$

Með tilliti til jöfnu (F.7), verður jafna (F.1) nú

$$\tau_n(\Gamma, \theta) \Big|_{2\theta=2\psi_{\pm}} = \tau_n^{P^{\pm}}(\Gamma) = f^{\pm}(\Gamma) \quad (\text{F.8})$$

Þar sem við ætlum aðeins að meðhöndla flotfallið $f^{\pm}(\sigma_n)$ en ekki einstakan Mohr-hring þá verður unnið aðeins í eftirfarandi horngildum:

$$2\theta = 2\psi_+ = \Phi + \pi/2$$

$$2\theta = 2\psi_- = \Phi - \pi/2.$$

Til að spara vinnu mun ég aðeins vinna í efra hluta Mohr-hringanna: $2\theta = 2\psi_+$. Öll neðangreind útleiðsla er samhverf við það sem gildir fyrir $2\theta = 2\psi_-$. Samkvæmt ofangreindum jöfnum fæst nú¹⁹

$$\tan(2\psi_+) = \tan\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\Phi)} \quad (\text{F.9})$$

$$\cos(2\psi_+) = \cos\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\Phi) \quad (\text{F.10})$$

$$\sin(2\psi_+) = \sin\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\Phi) \quad (\text{F.11})$$

Jöfnur (F.6) og (F.7) verða nú

$$\sigma_n(\Pi, \Gamma, \theta) = -\Pi(\Gamma, A_i) - \Gamma(\Pi, A_i) \sin(\Phi) \quad (\text{F.12})$$

$$\tau_n^{P^+}(\Gamma) = \Gamma(\Pi, A_i) \cos(\Phi) \quad (\text{F.13})$$

Með því að diffra jöfnu (F.12) og (F.13) með tilliti til Π fæst:

$$\frac{d\sigma_n(\Pi, \Gamma, \theta)}{d\Pi} = -1 - \frac{d\Gamma(\Pi, A_i)}{d\Pi} \sin(\Phi) - \Gamma(\Pi, A_i) \frac{d\sin(\Phi)}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\Pi} \quad (\text{F.14})$$

$$\frac{d\tau_n^{P^+}(\Gamma)}{d\Pi} = \frac{d\Gamma(\Pi, A_i)}{d\Pi} \cos(\Phi) + \Gamma(\Pi, A_i) \frac{d\cos(\Phi)}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\Pi} \quad (\text{F.15})$$

Ef jafna (F.2) er umröðuð og síðan deilt með $d\Pi$ fæst

$$\frac{d\sigma_n(\Pi, \Gamma, \theta)}{d\Pi} = \frac{1}{\tan(\Phi)} \frac{d\tau_n^{P^+}(\Gamma)}{d\Pi} \quad (\text{F.16})$$

Með jöfnu (F.10), (F.11), (F.14), (F.15) og (F.16) fæst nú...

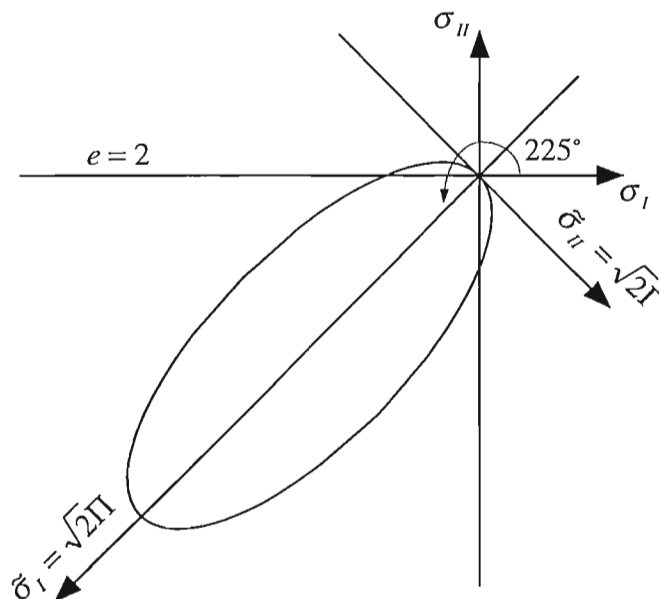
¹⁹ Sbr. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$ og $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

$$\begin{aligned}
 -1 - \frac{d\Gamma(\Pi, A_i)}{d\Pi} \sin(\Phi) - \Gamma(\Pi, A_i) \cos(\Phi) \frac{d\Phi}{d\Pi} &= \\
 = \frac{d\Gamma(\Pi, A_i)}{d\Pi} \frac{\cos^2(\Phi)}{\sin(\Phi)} - \Gamma(\Pi, A_i) \cos(\Phi) \frac{d\Phi}{d\Pi} &
 \end{aligned}
 \tag{F.17}$$

sem gefur eftir dálitla umröðun:

$$\frac{d\Gamma(\Pi, A_i)}{d\Pi} = -\sin(\Phi)
 \tag{F.18}$$

Athugið að jafna (F.18) er fengin óháð því hvort við gerum ráð fyrir að Φ sé fasti eða ekki, því sá liður sem inniheldur $d\Phi/d\Pi$ styttest út. Ofangreind jafna var sett fram af Birni Erlingssyni 1988 (sjá heimildaskrá), sem gagnrýni á setningu Hiblers: Ef myndað er nýtt hnitakerfi ofan á $\sigma_I - \sigma_{II}$ hnitakerfið í Mynd F.5a, sem snúið er 225° um origo, eins og Mynd F.9 sýnir.



Mynd F.9: Myndun nýrra hnitakerfa.

Þá fæst samkvæmt almennum hnitaskiptareglum [Mase ,1970]:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_I \\ \tilde{\sigma}_{II} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\sigma}_I, \sigma_I) & \cos(\tilde{\sigma}_I, \sigma_{II}) \\ \cos(\tilde{\sigma}_{II}, \sigma_I) & \cos(\tilde{\sigma}_{II}, \sigma_{II}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sigma_I - \sigma_{II} \\ \sigma_I - \sigma_{II} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{F.19}$$

Jafna (F.18) segir okkur að skerspennan Γ getur ekki aukist meira en normalspennan Π , en Mynd F.9 sýnir að slíkt á sér stað í báðum endum sporbaugs Hiblers. Hafíslíkanið MCRIM 2.5 bíður upp á að nota hring í staðin fyrir sporbaug sem flotfall. Eðlisfræðilega þá er hringurinn mun verri kostur en sporbaugurinn því þar eykst skerspennan mun hraðar.

VIÐAUKI G : FORRITIN LesaBOF OG LesaPRT

LesaboF.f90

```

!-----
! Forrit til lestrar RIMBOF, útgáfa 3.2. Þessi útgáfa er
! frábrugðin útg. 1.0 að því leyti að nú er vigurinn
! h breyttur frá h=(/0.010,0.050,0.125,0.225,0.500,0.950,
! 1.500,0.250,1.000,3.000/) yfir í h=(/0.010,0.225,0.700,
! 1.400,0.450,2.000,2.613/).
! Einnig er fjöldi lestra nú 29 í stað 17 áður.
! Útgáfa 2.0 var tilraunaútgáfa sem misheppnaðist
! Útgáfa 3.1 er frábrugðin 3.0 að því leyti að nú eru einnig
! tvö önnur fylki sem eru mynduð :ridg_value (Rvalue.dat)->
! segir til um þéttleiga á ridged/rafted ice: total_value
! (Tvalue.dat)-> heildarþéttleiki hafís í hverri griddsellu.
! Útgáfa 3.2 =>Bætt við fylkinu r_value (RHvalue.dat) sem
! reiknar út meðalþykkt ridged/rafted ice.
!-----
! dt                ítrekunar tímaskrefið dt=3600sek.
! scale=100%=1
! timei            lestur julian tíma.
! h                meðalþykkt hafíss í hverri categoríu, sjá RMCNTL.
! no_fyrst        Fjöldi categories fyrir first year ice.
! no_rubble       Fjöldi categories fyrir rubble ice (reising).
! no_multi        Fjöldi categories fyrir multi year ice.
! ncat2=ncat      Heildarfjöldi categories.
!-----
program read
implicit none
character(len=8)                :: title_1,title_2
character(len=10)               :: dummy_char
real                             :: dt
real                             :: scale,timei
real                             :: h_mean
integer                          :: ridg_compct,total_compct
integer                          :: nt,dt_out,no_fyrst,&
no_rubble,no_multi
integer                          :: yr,mon,day,hr,min,ncat,&
ncat2,problem,error
integer                          :: x,y,cat,time,k,nread
integer,parameter               :: nx=58,ny=58
real,parameter,dimension(7)    :: h=(/0.010,0.225,0.700,1.400,&
0.450,2.000,2.613/)

! SKILGREINING Á FYLKINU value
!-----
! 29 -> er fjöldi skifta sem lestur á að eiga sér
! stað í RIMBOF, þ.e. ítrekanir(t.d.=168/6)+upphafsástand(=1)
! ATH að 29=nread=nt/dt_out+1 ;
! nt=fjöldi ítrekana og dt_out=(t.d.)=3 =>þriðja hver keyrsla
! lesin, byrjað á keyrslu kl=0sek, þ.e. 0,3,6,9,12 keyrsla lesin
! 58=nx=ny -> er fjöldi griddpunkta í kerfinu (og griddsellur, þó
! svo að sá fjöldi sem notaður í griddsellu muni vera 57).
! 7 -> Fjöldi categories sem notaður er ! no_fyrst -> Fjöldi
! categories fyrir first year ice.
! no_rubble ->Fjöldi categories fyrir rubble ice (reising).
! no_multi -> Fjöldi categories fyrir multi year ice.
! ncat2=ncat -> Heildarfjöldi categories.
! integer,dimension(29,58,58,7) :: value
! Sjá p. 449 í bók 1;
!-----
integer,allocatable,dimension(:, :, :, : ) :: value
real,allocatable,dimension(:, :, : )      :: h_value,r_value
integer,allocatable,dimension(:, :, : )   :: ridg_value,&
total_value

17 format(t5,i1,t10,i1,t15,i1)
20 format(t2,a,t11,f10.3,t21,f10.3,t39,i2,t44,i2,&
t49,i2,t54,i2,t59,i2,t64,i2)
30 format(t1,20(i4))
35 format(t1,18(i4))
40 format(58(1x,f6.3))
50 format(58(1x,i3))

```

```

print *, "
print *, "
print *, "
print *, "
print *, "
pause '
                                Press "Enter" to continue !
open(unit=100,file="RIMBOF",status="old",action="read",&
  position="rewind",iostat=problem)
action_one: if (problem/=0) then
  print *, "Opening the file RIMBOF was unsuccessful!"
  print *, "Please check if the file exist and try again."
  print *, "Execution terminated!!!"
  stop
else
! Lestur til að komast að réttri staðsetningu.
  dummy_loop_1: do k=1,8
    read (unit=100,fmt='(a10)') dummy_char
  end do dummy_loop_1
! Lestur breytistærða.
  read (unit=100,fmt='(t4,f12.6)') dt
  read (unit=100,fmt='(t3,i3)') nt
  read (unit=100,fmt='(t3,i3)') dt_out
  print *, "dt,nt,dt_out= ",dt,nt,dt_out
  nread=nt/dt_out+1
! Lestur til að komast að réttri staðsetningu.
  dummy_loop_2: do k=1,10
    read (unit=100,fmt='(a10)') dummy_char
  end do dummy_loop_2
! no_fyrst -> Fjöldi categories fyrir first year ice.
! no_rubble ->Fjöldi categories fyrir rubble ice (reising).
! no_multi -> Fjöldi categories fyrir multi year ice.
! ncat2=ncat -> Heildarfjöldi categories.
  read (unit=100,fmt=17) no_fyrst,no_rubble,no_multi
  ncat2=no_fyrst+no_rubble+no_multi
  print *, "ncat2,no_fyrst,no_rubble,no_multi= "
  print *, ncat2,no_fyrst,no_rubble,no_multi
  print *, "
! Lestur til að komast að réttri staðsetningu.
  dummy_loop_3: do k=1,13
    read (unit=100,fmt='(a10)') dummy_char
  end do dummy_loop_3
  allocate(value(nread,nx,ny,ncat2),h_value(nread,nx,ny),&
    ridg_value(nread,nx,ny),total_value(nread,nx,ny),&
    r_value(nread,nx,ny),stat=error)
  if (error/=0) then
    print *, "Program could not allocate space for the"
    print *, "matrix: value, h_value, ridg_value r_value and/or"
    print *, "total_value -> Execution terminated!!!"
    stop
  end if
!-----!
! Það er einhver mismunur á meðalþykktarskilgreiningunni milli
! RIMBOF, RIMPRT og RMCNTL. Líklega ætti að nota þessa neðangreinda
! lykkju á RIMPRT.
!   dummy_loop_3: do k=1,3
!     read (unit=100,fmt='(a10)') dummy_char
!   end do dummy_loop_3
!   categorie: do cat=1,ncat
!     read (unit=100,fmt='(t28,f6.3)') h_mean(i) ! á eftir að skilgr.
!   end do categorie
!-----!
  title_1="ICE CHAR"
  the_main_loop: do time=1,nread
    print *, time
    loop_1: do
      read (unit=100,fmt=20) title_2,scale,timei,ncat,&
        yr,mon,day,hr,min
      action_two: if (title_1==title_2) then
        ! x is the x-coordinate of the system.
        ! y is 58-(y-coordinate) of the system.
        loop_2: do y=1,58
          loop_3: do cat=1,ncat2
            read (unit=100,fmt=30) (value(time,x,y,cat),x=1,20)
            read (unit=100,fmt=30) (value(time,x,y,cat),x=21,40)
            read (unit=100,fmt=35) (value(time,x,y,cat),x=41,58)
          end do loop_3
        end do loop_2
      end do loop_1
    end do loop_2
  end do the_main_loop

```

```

        cycle the_main_loop
      else
        cycle loop_1
      end if action_two
    end do loop_1
  end do the_main_loop
close(unit=100)
end if action_one
!-----!
!
! Hér verður 9999 að (sum(h(i),i=1,7)/100)*10=-0.740 !!!
!
loopN_0: do time=1,nread
  loopN_1: do x=1,58
    loopN_2: do y=1,58
      loopN_3: do cat=1,ncat2
        if (value(time,x,y,cat)==9999) then
          value(time,x,y,cat)=-10
        end if
      end do loopN_3
    end do loopN_2
  end do loopN_1
end do loopN_0
!-----!
! Þessi lykka myndar fylkið "h_value(time,x,y)" sem er meðalgildið
! á ísþykkt fyrir hverja griddsellu.
! sem segir til um heildar-meðalþykkt hafíss, í hverri griddsellu.
! h(cat) er meðalþykktin í hverri kategoríu.
! value3 er heildarmeðalþykktin í hverri griddsellu.
!
! ->Meðalþykkt hverrar gridsellu.
loopM_0: do time=1,nread
  loopM_1: do x=1,58
    loopM_2: do y=1,58
      h_mean=0.0
      loopM_3: do cat=1,ncat2
        h_mean=h(cat)*(0.01*real(value(time,x,y,cat)))+h_mean
      end do loopM_3
      h_value(time,x,y)=h_mean
    end do loopM_2
  end do loopM_1
end do loopM_0
!-----!
! ->Meðalþykkt ridged/rafted ice í hverri gridsellu.
loopMb_0: do time=1,nread
  loopMb_1: do x=1,58
    loopMb_2: do y=1,58
      h_mean=0.0
      loopMb_3: do cat=no_fyrst+1,no_fyrst+no_rubble
        h_mean=h(cat)*(0.01*real(value(time,x,y,cat)))+h_mean
      end do loopMb_3
      r_value(time,x,y)=h_mean
    end do loopMb_2
  end do loopMb_1
end do loopMb_0
!-----!
! Heildarþéttleiki þakkaðs (ridging/rafting) hafíss.
loopO_0: do time=1,nread
  loopO_1: do x=1,58
    loopO_2: do y=1,58
      ridg_compct=0
      loopO_3: do cat=no_fyrst+1,no_fyrst+no_rubble
        ridg_compct=value(time,x,y,cat)+ridg_compct
      end do loopO_3
      ridg_value(time,x,y)=ridg_compct
    end do loopO_2
  end do loopO_1
end do loopO_0
!-----!
! Heildar þéttleiki hafíss í prósentum.
loopP_0: do time=1,nread
  loopP_1: do x=1,58
    loopP_2: do y=1,58
      total_compct=0
      loopP_3: do cat=2,ncat2
        total_compct=value(time,x,y,cat)+total_compct
      end do loopP_3
    end do loopP_2
  end do loopP_1
end do loopP_0

```

```

        total_value(time,x,y)=total_compct
    end do loopP_2
end do loopP_1
end do loopP_0
!-----!
! "DEALLOCATE" FYRIR "VALUE" TIL AÐ SPARA RAM! Héðan í frá er ekki
! hægt að nota þetta fylki.
deallocate(value,stat=error)
if (error/=0) then
    print *,"Program could not deallocate"
    print *,"space for the matrix value!"
end if
!-----!
open(unit=15,file="Hvalue.dat",status="replace",action="write",&
    position="rewind",iostat=problem)
action_2: if (problem/=0) then
    print *,"Creating the file Hvalue.dat was unsucsecsfull!"
    print *,"Please try again. Execution terminated!!!"
    stop
else
    loopS_0: do time=1,nread
        loopS_1: do y=1,57 ! Frá 1 til 57 því við höfum bara 57 griddsellur!
            write (unit=15,fmt=40) (h_value(time,x,y),x=2,58)
        end do loopS_1
    end do loopS_0
end if action_2
close(unit=15)
!-----!
open(unit=15,file="RHvalue.dat",status="replace",action="write",&
    position="rewind",iostat=problem)
action_2b: if (problem/=0) then
    print *,"Creating the file RHvalue.dat was unsucsecsfull!"
    print *,"Please try again. Execution terminated!!!"
    stop
else
    loopSb_0: do time=1,nread
        loopSb_1: do y=1,57 ! Frá 1 til 57 því við höfum bara
            ! 57 griddsellur!
            write (unit=15,fmt=40) (r_value(time,x,y),x=2,58)
        end do loopSb_1
    end do loopSb_0
end if action_2b
close(unit=15)
!-----!
open(unit=15,file="Rvalue.dat",status="replace",action="write",&
    position="rewind",iostat=problem)
action_3: if (problem/=0) then
    print *,"Creating the file Rvalue.dat was unsucsecsfull!"
    print *,"Please try again. Execution terminated!!!"
    stop
else
    loopQ_0: do time=1,nread
        loopQ_1: do y=1,57 !Frá 1 til 57 því við höfum bara 57 griddsellur!
            write (unit=15,fmt=50) (ridg_value(time,x,y),x=2,58)
        end do loopQ_1
    end do loopQ_0
end if action_3
close(unit=15)
!-----!
open(unit=15,file="Tvalue.dat",status="replace",action="write",&
    position="rewind",iostat=problem)
action_4: if (problem/=0) then
    print *,"Creating the file Tvalue.dat was unsucsecsfull!"
    print *,"Please try again. Execution terminated!!!"
    stop
else
    loopR_0: do time=1,nread
        loopR_1: do y=1,57 ! Frá 1 til 57 því við höfum bara 57
            ! griddsellur!
            write (unit=15,fmt=50) (total_value(time,x,y),x=2,58)
        end do loopR_1
    end do loopR_0
end if action_4
close(unit=15)
!-----!
print *,"_____"
print *,"_____"

```

```

print *, "Final check:"
print *, "title_1 is ", title_1
print *, "title_2 is ", title_2
print *, "scale is ", scale
print *, "time1 is ", time1
print *, "ncat is ", ncat
print *, "ncat2 is ", ncat2
print *, "yr;mon;day;hr;min"
print *, yr, ";", mon, ";", day, ";", hr, ";", min
print *, "-----"
print *, "-----"
pause 'Press "Enter" to quit!'
end program read

```

LesapRT.f90

```

!-----
!
! Forrit til lestrar RIMPRT, útgáfa 1.0
program read
implicit none
character(len=32)          ::          title_1
character(len=44)         ::          title_2
integer                   ::          problem,time
print *, "-----"
print *, "-----"
print *, "-----"
print *, "-----"
print *, "-----"
pause '          Press "Enter" to continue !          '
open(unit=100,file="RIMPRT",status="old",action="read",&
      position="rewind",iostat=problem)
open(unit=15,file="mass.dat",status="replace",action="write",&
      position="rewind",iostat=problem)
action_one: if (problem/=0) then
  print *, "Opening the file RIMPRT or mass.dat was unsuccessful!"
  print *, "Execution terminated!!!"
  stop
else
  title_1=" TOTAL MASS IN MODEL GRID =          "
  the_main_loop: do time=1,169
    print *, time
    loop_1: do
      read (unit=100,fmt='(a44)') title_2
      if (title_1==title_2(1:32)) then
        write (unit=15,fmt='(a11)') title_2(33:44)
        cycle the_main_loop
      else
        cycle loop_1
      end if
    end do loop_1
  end do the_main_loop
close(unit=100)
close(unit=15)
end if action_one
print *, "-----"
print *, "-----"
pause 'Press "Enter" to quit!'
end program read

```

VIÐAUKI H : MATLAB FORRIT TIL FRAMSETNINGAR Á NIÐURSTÖÐUM

Sumar MATLAB rútnurnar sem hafa verið notaðar í þessu verkefni eru nokkuð lengri en þessi (GinconT.m). Í grunnatriðum samanstendur hún af sömu föllum og aðrar sem eru notaðar í verkefninu. Þessi rúttína er meðal annars notuð við gerð myndar 6.5.

GinconT.m

```
%
%
%-----Dagseting: 02. janúar 1997-----
%
%Keyrsla 168klst/24klst=7daga fram í tíma. Keyrsla hefst kl. 12.00 02. jan.
%
%-----
load I.dat
load JM.dat
load G.dat
load lengd.dat
load breidd.dat
load lengd2.dat
load breidd2.dat
load Tvalue.dat
%-----
concentr=[10,30,50,70,80,90];
%-----
titl2=['t= 0 klst t= 6 klst t= 12 klst t= 18 klst t= 24 klst t= 30 klst,...
t= 36 klst t= 42 klst t= 48 klst t= 54 klst t= 60 klst t= 66 klst t= 72,...
klst t= 78 klst t= 84 klst t= 90 klst t= 96 klst t=102 klst t=108 klst,...
t=114 klst t=120 klst t=126 klst t=132 klst t=138 klst t=144 klst t=150,...
klst t=156 klst t=162 klst t=168 klst '];
%titl2=['t= 0 hourst= 6 hourst= 12 hourst= 18 hourst= 24 hourst= 30,...
hourst= 36 hourst= 42 hourst= 48 hourst= 54 hourst= 60 hourst= 66 hourst=,...
72 hourst= 78 hourst= 84 hourst= 90 hourst= 96 hourst=102 hourst=108,...
hourst=114 hourst=120 hourst=126 hourst=132 hourst=138 hourst=144, ...
hourst=150 hourst=156 hourst=162 hourst=168 hours'];
x=57;
y=57;
x_label=[-13.16+0.42/4:0.42/2:-1.19-0.42/4];
y_label=[-1.0+0.42/4:0.42/2:10.97-0.42/4];
%-----
nread=29;
%n=0;
for n=0:nread-1,
figure,pcolor(x_label-0.21/2,y_label-,...
0.21/2,flipud(Tvalue(n*y+1:(n+1)*y,:)),shading('flat'),...
text(-12,10,titl2(11*n+1:11*n+11)),axis('equal'),...
set(gca,'fontsize',12),...
title('Heildarþéttleiki hafíss (%) ; to=(02/1-97;kl.12.00)'),...
%title('Total Ice Compactness in % ; to=(02/1-97; 12.00)'),...
set(gcf,'PaperPosition',[0.25 2.5 6.5 4]),grid,...
xlabel('Lengdargráða'),ylabel('Breiddargráða'),colorbar('vert'),hold on...
%xlabel('Longitude'),ylabel('Latitude'),colorbar('vert'),hold on;
%contour(x_label,y_label,flipud(Tvalue(n*y+1:(n+1)*y,:)),...
concentr,'k'),...
%-----
text(-4.366+0.10,-0.6541-0.01,'+64°','fontsize',8,'Rotation',...
-7,'Color','w'),...
text(-4.0512+0.10,1.3209-0.01,'+66°','fontsize',8,'Rotation',...
-7,'Color','w'),...
text(-3.7359+0.10,3.2960-0.01,'+68°','fontsize',8,'Rotation',...
-7,'Color','w'),...
text(-9.9299-0.87,7.3936+0.40,'+70°','fontsize',8,'Rotation',...
-24,'Color','w'),...
text(-9.0044-0.87,9.1715+0.35,'+72°','fontsize',8,'Rotation',...
-24,'Color','w'),...
%-----
%text(-4.366-0.3,-0.6541-0.1,'-10°','fontsize',8,'Rotation',...
-8,'Color','w'),...
text(-6.5148-0.44,-0.2243-0.1+0.00,'-15°','fontsize',8,'Rotation',...
-14,'Color','w'),...
text(-8.6232-0.46,0.3729-0.1+0.04,'-20°','fontsize',8,'Rotation',...
-18,'Color','w'),...
```



```

text(-10.6786-0.46,1.1329-0.1+0.06,-25°,'fontsize',8,'Rotation',...
     -21,'Color','w'),...
text(-12.6695-0.46,2.0502-0.1+0.08,-30°,'fontsize',8,'Rotation',...
     -24,'Color','w'),...
%-----
for j=2:66,
    line([-I(j,3),-I(j-1,3)],[I(j,5),I(j-1,5)],'Color','k')
end
line([-I(j,3),-I(1,3)],[I(j,5),I(1,5)],'Color','k')
%-----
for j=2:8,
    line([-JM(j,3),-JM(j-1,3)],[JM(j,5),JM(j-1,5)],'Color','k')
end
line([-JM(j,3),-JM(1,3)],[JM(j,5),JM(1,5)],'Color','k')
%-----
for j=2:35,
    line([-G(j,3),-G(j-1,3)],[G(j,5),G(j-1,5)],'Color','k')
end
%-----
for xx=1:9:37,
for yy=2+(xx-1):9+(xx-1),
line([-lengd(yy,3),-lengd(yy-1,3)],[lengd(yy,5),lengd(yy-1,5)], ...
     'Color','w')
end
end
%-----
for xx=1:21:85,
for yy=2+(xx-1):21+(xx-1),
line([-breidd(yy,3),-breidd(yy-1,3)],[breidd(yy,5),breidd(yy-...
     1,5)],'Color','w')
end
end
%-----
for xx=1:9:37-9,
for yy=2+(xx-1):9+(xx-1),
line([-lengd2(yy,3),-lengd2(yy-1,3)],[lengd2(yy,5),lengd2(yy-...
     1,5)],'Color','w','LineStyle',':')
end
end
%-----
for xx=1:21:85-21,
for yy=2+(xx-1):21+(xx-1),
line([-breidd2(yy,3),-breidd2(yy-1,3)],[breidd2(yy,5),breidd2(yy-...
     1,5)],'Color','w','LineStyle',':')
end
end
%-----
hold off;
end

```